Estratto dagli *" Atti del VII Congresso, dell' Unione Matematica Italiana, Genova 1963,,*

L. GODEAUX — *Sopra un teorema di* F. ENRIQUES [1].

Si sa che l'immagine di una involuzione del secondo ordine senza punti uniti, appartenente ad una superficie F di generi $p_a = p_4 = 1$, è una superficie F' di bigenere uno $(p_a = p_g = 0, P_6 = 1)$. F. ENRIQUES ha dimostrato che, reciprocamente, ogni superficie F' di bigenere uno è immagine di una involuzione del secondo ordine, priva di punti uniti, appartenente ad una superficie F di genere uno. Vogliamo dare una dimostrazione di questo teorema.

Una superficie F' di bigenere uno può essere rappresentata dall'equazione

$$x_1 x_2 x_3 x_4 f(x_1 x_2 x_3 x_4) + \Phi(x_2 x_3 x_4\,,\, x_3 x_4 x_1\,,\, x_4 x_1 x_2\,,\, x_1 x_2 x_3) = 0,$$

dove f, Φ sono forme algebriche di grado due , e di ordine sei passante doppiamente per gli spigoli del tetraedro di riferimento. Diciamo C le sezioni piane, di genere 4, di F', e C' le aggiunte alle curve C, anche di genere 4, tagliate dalle superficie cubiche passanti per gli spigoli del tetraedro di riferimento. Supponiamo che esista una superficie F contenente una involuzione I del secondo ordine, senza punti uniti, di cui sia F' una immagine. Alle curve C, C' corrispondono sopra F curve Γ_0, Γ_1. Supporremo inoltre che queste curve appartengano ad uno stesso sistema lineare $|\Gamma|$. Questo sistema ha la dimensione 7. Prendiamo come modello proiettivo di F la superficie di S_7 di cui le Γ sono sezioni iperpiane. Sopra questa superficie, l'involuzione I è determinata da una omografia con due assi a tre dimensioni. Siano

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}$$

le equazioni di questa omografia. Le equazioni di F' sono ottenute

[1] Un lavoro su questo argomento è in corso di stampa nel « Bulletin des Sciences Mathématiques ».

mediante l'eliminazione di x_5, x_6, x_7, x_8 fra l'equazione di F e le equazioni (1). Dobbiamo dunque avere

$$(2) \quad \varrho\, x_5 = x_2 x_3 x_4\,, \quad \varrho\, x_6 = x_3 x_4 x_1\,, \quad \varrho\, x_7 = x_4 x_1 x_2\,, \quad \varrho\, x_8 = x_1 x_2 x_3\,.$$

Dall'equazione di F' si ha

$$x_1 x_2\; x_3 x_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varrho^2\, \Phi(x_5, x_6, x_7, x_8) = 0$$

e quindi $\varrho^2 = x_1 x_2 x_3 x_4$. Dalle (2) si ricava

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 x_2 &= x_7 x_8\,, & x_1 x_3 &= x_6 x_8\,, & x_1 x_4 &= x_6 x_7\,, \\ x_2 x_3 &= x_5 x_8\,, & x_2 x_4 &= x_5 x_7\,, & x_3 x_4 &= x_5 x_6\,. \end{aligned}$$

Abbiamo anche

$$(4) \quad x_1 x_5 = x_2 x_6 = x_3 x_7 = x_4 x_8\,.$$

La superficie F esiste ed è l'intersezione delle iperquadriche (3), (4) e di

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \Phi(x_5, x_6, x_7, x_8) = 0.$$

Il sistema $|\Gamma|$ ha il genere 7, il grado 12 e la dimensione 7, dunque è il suo proprio aggiunto. La superficie F possiede una curva canonica di ordine zero ed è una superficie di genere uno.