Sur les surfaces du quatrième ordre contenant une droite.

Nota di Lucien Godeaux
presentata dal Socio nazionale residente Alessandro Terracini
nell'adunanza del 24 Novembre 1965

Riassunto. — *Si dimostra che una superficie del quarto ordine contenente una retta rappresenta una involuzione appartenente ad una superficie di uno spazio a quattro dimensioni di cui le sezioni iperpiane sono le curve canoniche.*

Nous établissons dans cette note le théorème suivant:

Une surface du quatrième ordre contenant una droite est l'image d'une involution du second ordre appartenant à una surface d'ordre 9, F, d'un espace à quatre dimensions, dont les sections hyperplanes forment le système canonique. L'involution est engendrée par une homologie harmonique dont le centre appartient à la surface F.

1. — Soit Φ une surface du quatrième ordre contenant une droite. Si

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 , \qquad f'_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

sont les équations de deux plans passant par la droite, l'équation de la surface peut s'écrire

$$f_1 f'_3 - f'_1 f_3 = 0 , \tag{1}$$

f_3 et f'_3 étant des formes algébriques du troisième degré en x_1, x_2, x_3, x_4. La surface possède une courbe canonique d'ordre zéro et a les genres $p_a = P_4 = 1$.

La surface contient une droite $\Gamma_1 (f_1 = f'_1 = 0)$ et une courbe Γ_9 d'ordre 9 et de genre 10 $(f_3 = f'_3 = 0)$.

Nous désignerons par Γ les sections planes de Φ. On sait que $|\Gamma|$ est son propre adjoint.

Considérons dans un espace S_4 la surface F d'équations

$$f_1 f'_3 - f'_1 f_3 = 0 , \qquad f_1 x_0^2 + f_3 = 0 .$$

Cette surface appartient également à l'hypersurface

$$f'_1 x_0^2 + f'_3 = 0$$

et est l'intersection complète des deux hypersurfaces

$$x_0^2 f_1 + f_3 = 0 , \qquad x_0^2 f'_1 + f'_3 = 0 . \tag{2}$$

La surface F est transformée en soi par l'homologie harmonique H d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : - x_1 : - x_2 : - x_3 : - x_4 .$$

Sur F, H détermine une involution I du second ordre ayant comme éléments unis la section par l'hyperplan $x_0 = 0$ et le domaine du point O, centre de l'homologie, qui est simple pour la surface.

La surface F est une surface double de support Φ ayant comme courbe de diramation la courbe $\Gamma_1 + \Gamma_9$, la courbe Γ_1 correspondant au domaine du point O et la courbe Γ_9 à la courbe unie de l'involution I.

2. — La surface F ne peut être rationnelle. Comme surface du neuvième ordre de l'espace S_4, ses adjointes sont les hyperplans et le système $[C]$ de ses sections hyperplanes est son système canonique. Ce raisonnement pourrait suffire; il nous a paru intéressant de l'établir par une autre voie.

Observons tout d'abord que par un théorème d'Enriques, la transformée sur F d'une courbe canonique da Φ augmentée de la courbe unie, est une courbe canonique de F. Or, la courbe canonique de Φ est d'ordre zéro et il en est de même de sa transformée. Il en résulte que si nous désignons par C_0 la section de F par $x_0 = 0$, la courbe $C_0 + O$ est une courbe canonique de F. Mais le point O étant simple pour la surface, est équivalent à une courbe exceptionnelle. Le courbe C_0 appartient donc au système canonique pur de F. On pourrait déjà en conclure que les sections hyperplanes de F sont des courbes canoniques.

Appelons C_1 les courbes découpées sur F per les hyperplans passant per O. Le système $|C_1|$ est le transformé du système $|\Gamma|$ des sections planes de Φ. Il a le genre 9 et le degré 8.

Aux courbes 2Γ découpées sur Φ par les quadriques, correspondent sur F des courbes du système $|2C_1|$ rencontrant une courbe C_1 en 16 points variables. Le point O est simple pour les courbes C_1 et double pour les courbes $2C_1$, donc les courbes $2C_1$ rencontrent une courbe C_1 en des groupes de 18 points qui ne peuvent etre que des groupes de la série canonique de C_1. On a donc $|C'_1| = |2C_1|$ et les courbes C_1 sont donc des courbes canoniques de F.

De tout ceci résulte que le système canonique de F est le système de ses sections hyperplanes. La surface F est d'autre part régulière comme intersection totale de deux hypersurfaces. Elle a donc les genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 10$.