Lucien Godeaux

REMARQUES SUR LES COUPLES DE CONGRUENCES STRATIFIABLES

Sunto. - Si dimostra che due congruenze di rette doppiamente stratificabili non possono esistere che nello spazio a tre dimensioni e si dà la costruzione di queste congruenze.

On sait que Fubini a considéré des couples de congruences satisfaisant aux conditions suivantes (¹): Soient $(g), (g')$ deux congruences de droites de S_3 dont les paramètres des développables sont u, v. Soient F_1, F_2 les foyers de g, F_1', F_2' ceux de g'. S'il existe, sur toute droite g, une infinité de points tels que les plans tangents en ces points aux surfaces qu'ils engendrent passent par g', les congruences $(g), (g')$ sont dites stratifiables dans un sens (²). Deux congruences $(g), (g')$ peuvent être stratifiables dans les deux sens, ou encore doublement stratifiables.

Supposons que la surface focale (F_1) de (g) soit le lieu des arêtes de rebroussement des développables u et qu'il en soit de même de la surface focale (F_1') de (g'). Pour que les congruences $(g), (g')$ soient stratifiables dans un sens, il suffit que le plan

(¹) Fubini, *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R* (Annali di Matematica, ser. 4, t. I, 1923-1924, pp. 241-257). Voir aussi Finikoff, *Sur les congruences stratifiables* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1929, pp. 313-364); Vincensini, *Sur les congruences stratifiables* (Journal de Mathématiques, 1934, pp. 419-449); *Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1934, pp. 303-319).

(²) La dénomination de congruences stratifiables est due à Bianchi, *Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili* (Rendiconti Accad. Lincei, 2° sem. 1924, pp. 369-377).

tangent en F_1 à la surface (F_1) contienne le point F_1' (ou inversement).

Dans cette note, nous montrerons que la notion de congruences stratifiables dans un sens existe dans un espace linéaire à un nombre quelconque de dimensions mais que celle de congruences doublement stratifiables n'existe que si l'espace est à trois dimensions. Nous en déduirons une construction de ces couples de congruences.

La notion de congruences stratifiables pourrait se généraliser de la manière suivante: Soit, dans un espace linéaire à un nombre suffisamment élevé de dimensions, une suite de LAPLACE

$$\ldots,\ U_n,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_n,\ \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, et A, B les foyers d'une congruence de droites, B étant le transformé de LAPLACE de A dans le sens des u. Les congruences (UV), (AB) sont dites n-stratifiables si A appartient à l'espace $U_n \ldots UV \ldots V_{n-1}$ et B à l'espace $U_{n-1} \ldots UV \ldots V_n$. Pour $n=1$, on retrouve les congruences stratifiables de FUBINI. C'est une question sur laquelle nous comptons revenir.

1. - Considérons, dans un espace S_r à r dimensions $(r>2)$ deux points U, V, dépendant de deux paramètres u, v, liés par les relations [3]

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0,$$

où a, b sont des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire.

Les points U, V sont transformés de LAPLACE l'un de l'autre et appartiennent à une suite de LAPLACE

$$\ldots,\ U_n,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V_1,\ \ldots,\ V_n,\ \ldots \qquad \text{[L]}$$

---

[3] Nous écrivons, pour la facilité typographique,

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\, \partial v^k} = \varphi^{ik} .$$

On trouvera établies les formules données dans ce paragraphe dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé. Actualités scientifiques* (Paris, Hermann, 1934).

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

On a

$$U_{n+1} = U_n^{01} - U_n (\log . bh_1 h_2 \dots h_n)^{01}, \quad U_n^{10} = h_n U_{n-1}, \qquad [1]$$
$$V_{n+1} = V_n^{10} - V_n (\log . ak_1 k_2 \dots k_n)^{10}, \quad V_n^{01} = k_n V_{n-1},$$

moyennant

$$h_n = -(\log . bh_1 h_2 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log . ak_1 k_2 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1},$$
$$h_0 = k_0 = 4ab .$$

Pour qu'un point $J = \lambda U - \mu V$ de la droite UV décrive un réseau conjugué à la congruence (UV), il suffit que l'on ait (Demoulin)

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0 .$$

Le point J détermine alors une suite de Laplace

$$\dots, J_n, \dots, J_1, J, J_{-1}, \dots, J_{-n}, \dots \qquad [I]$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et qui est inscrite dans la suite L.

On a

$$J_n = \mu_{n-1} U_n - \mu_n U_{n-1}, \qquad J_{-n} = \lambda_{n-1} V_n - \lambda_n V_{n-1},$$

en posant

$$\mu_{n+1} = \mu_n^{01} - \mu_n (\log . bh_1 h_2 \dots h_n)^{01}, \qquad \mu_n^{10} = h_n \mu_{n-1}, \qquad [2]$$
$$\lambda_{n+1} = \lambda_n^{10} - \lambda_n (\log . ak_1 k_2 \dots k_n)^{10}, \qquad \lambda^{01} = k_n \lambda_{n-1},$$

équations analogues aux équations [1].

2. - Donnons-nous un point A_1 du plan UU_1U_2 et proposons-nous de chercher si le point J peut être choisi de telle sorte que la droite JJ_1 passe par A_1.

Un point du plan UU_1U_2 peut s'écrire sous la forme $\eta_0 U + \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2$ et nous dirons que η_0, η_1, η_2 sont les coordonnées locales de ce point.

L'équation locale de la droite $J_1 J_2$ est

$$\mu\eta_0 + \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2 = 0 .$$

Dans cette équation, remplaçons μ_1, μ_2 en fonction de μ en utilisant les équations [2] et supposons que η_0, η_1, η_2 soient les coordonnées locales du point A_1. Nous obtenons une équation de la forme

$$a_0\mu^{02} + a_1\mu^{01} + a_2\mu = 0 .$$

Supposons pour un instant u constant et soient $m_1(u, v)$, $m_2(u, v)$ deux intégrales particulières de cette équation. Son intégrale générale s'écrira

$$\mu = \varphi_1(u) m_1(u, v) + \varphi_2(u) m_2(u, v) ,$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions arbitraires de u.

En tenant compte de $\mu^{10} + 2b\lambda = 0$, nous avons

$$2b\lambda + \varphi_1^{10} m_1 + \varphi_2^{10} m_2 + \varphi_1 m_1^{10} + \varphi_2 m_2^{10} = 0 .$$

En dérivant par rapport à v, nous obtenons

$$-2b\lambda(\log . b)^{01} - 4ab\mu + \varphi_1^{10} m_1^{01} + \varphi_2^{10} m_2^{01} + \varphi_1 m_1^{11} + \varphi_2 m_2^{11} = 0$$

et finalement une équation de la forme

$$a_1'\varphi_1 + a_2'\varphi_2 + a_1''\varphi_1^{10} + a_2''\varphi_2^{10} = 0 .$$

Il en résulte que l'on peut choisir φ_1 arbitrairement et que φ_2 est déterminé à une constante près. Il existe donc une infinité de points J tels que la droite $J_1 J_2$ passe par A_1. Par conséquent, nous pouvons choisir sur la droite UV deux points J et $J' = \lambda' U - \mu' V$ tels que les droites $J_1 J_2$, $J_1' J_2'$ (en adoptant des notations analogues pour J' à celles que l'on a choisies pour J) se coupent en A_1.

3. - Supposons maintenant que le point A_1 décrive un réseau conjugué (u, v). Ce réseau est conjugué aux congruences $(J_1 J_2)$, $(J_1' J_2')$ et détermine per conséquant une suite de LAPLACE (II) inscrite dans la suite (I) et dans la suite (I′) déterminée par J'.

Le transformé de LAPLACE A de A_1 dans le sens des u est l'intersection des droites JJ_1 et $J'J_1'$; celui de A dans le même sens est l'intersection B des droites JJ_{-1}, $J'J'_{-1}$.

Nous désignerons par $A_2, A_3, \ldots$ les transformés successifs de A_1 dans le sens des v, par $B_1, B_2, \ldots$ ceux de B dans le sens des u. Le point A_n est l'intersection des droites $J_n J_{n+1}$, $J'_n J'_{n+1}$ et B_n celle des droites $J_{-n} J_{-n-1}$, $J'_{-n} J'_{-n-1}$.

Il existe sur la droite UV une infinité de points possédant les mêmes propriétés que J, J'. Le plan tangent à la surface (J) au point J est le plan $J_1 J J_{-1}$ passant par la droite AB. En d'autres termes, il existe sur UV une infinité de points engendrant des surfaces dont les plans tangents passent par la droite AB. Les congruences (UV), (AB) sont donc stratifiables dans un sens.

En introduisant des nombres μ_n', λ_n' pour la suite (I′) comme on a introduit des nombres μ_n, λ_n pour la suite (I), on voit que les coordonnées des points A_1, A, B, B_1, sont données par

$$A_1 = \begin{vmatrix} U_2 & U_1 & U \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu \\ \mu_2' & \mu_1' & \mu' \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} U_1 & U & V \\ \mu_1 & \mu & \lambda \\ \mu_1' & \mu' & \lambda' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} V_1 & V & U \\ \lambda_1 & \lambda & \mu \\ \lambda_1' & \lambda' & \mu' \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} V_2 & V_1 & V \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda \\ \lambda_2' & \lambda_1 & \lambda' \end{vmatrix}.$$

4. - Désignons par $x_0, x_1, \ldots x_r$ les coordonnées projectives homogènes des points de S_r et considérons un espace S_{r+2} contenant S_r et dont les coordonnées projectives homogènes sont $x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}$. Les équations de S_r dans S_{r+2} sont $x_{r+1} = x_{r+2} = 0$.

Appelons U' le point dont les $r+1$ premières coordonnées sont celles de U et les dernières $x_{r+1} = \mu$, $x_{r+2} = \mu'$. Soit de même V' le point dont les $r+1$ premières coordonnées sont celles de V et les autres $x_{r+1} = \lambda$, $x_{r+2} = \lambda'$. En vertu des relations données au début, les points U', V' sont transformés de LAPLACE l'un de l'autre. Ces points déterminent une suite de LAPLACE.

$$\ldots, U_n', \ldots U_1', U', V', V_1', \ldots, V_n', \ldots \qquad [L']$$

analogue à la suite L.

On voit tout de suite que la suite L est la projection de la suite L' à partir de la droite S_1 d'équations $x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 0$.

Mais de plus, le point A est l'intersection de S_r avec le plan $U_1' U' V'$ et B celle de S_r avec le plan $V_1' V' U'$. D'une manière générale, le point A_n est l'intersection de S_r avec le plan $U'_{n+1} U'_n U'_{n-1}$ et le point B_n, celle du plan $V'_{n+1} V'_n V'_{n-1}$ avec le même espace.

On peut déduire de ce qui précède la construction de deux congruences stratifiables dans un sens, de S_r, en partant d'une suite de LAPLACE donnée dans un espace S_{n+2} ; nous ne nous y arrêterons pas.

5. - Supposons maintenant que les congruences (UV), (AB) soient doublement stratifiables. Alors le plan A_1AB contient le point U.

On peut trouver, d'une infinité de manières, un point K de la droite AB décrivant un réseau conjugué à la congruence (AB), tel que si K_1, K_2 sont les transformés de LAPLACE successifs de K dans le sens des v, le point U_1 appartienne à la droite K_1K_2. Alors la suite de LAPLACE déterminée par le point K est inscrite dans la suite (II) et le point U appartient à la droite KK_1.

Le plan A_1AB est l'intersection avec S_r de l'espace à quatre dimensions $U_2' U_1' U' V' V_1'$. Cet espace contient les points K, K_1, donc la droite KK_1 et le point U. Mais alors cet espace contient la droite UU' et rencontre la droite S_1 en un point.

De même, le plan A_2A_1A est l'intersection de S_r avec l'espace $U_3' U_2' U_1' U' V'$, espace contenant K_1, K_2, donc U_1 et par conséquent la droite U_1U_1'. Cet espace rencontre donc la droite S_1 en un point.

Les espaces $U_2' U_1' U' V' V_1'$, $U_3' U_2' U_1' U' V'$ ont en commun un espace à trois dimensions $U_2' U_1' U' V'$ et par conséquent appartiennent à un espace à cinq dimensions S_5. Cet espace S_5 rencontre la droite S_1 en deux points distincts et contient cette droite, à moins que l'espace $U_2' U_1' U' V'$ ne rencontre S_1 en un point. Mais dans cette dernière hypothèse, les points U_2, U_1, U, V seraient en ligne droite, ce qui est impossible.

On voit de même que l'espace $U_1' U' V' V_1' V_2'$ appartient à S_5, et ainsi de suite. La suite L' appartient à cet espace. On a donc $r + 2 = 5$ et $r = 3$.

La notion de couple de congruences doublement stratifiables n'a un sens que dans un espace à trois dimensions.

6. - De ce qui précède, on peut déduire une construction de couples de congruences doublement stratifiables dont l'existence implique une condition que l'on va déterminer.

Donnons-nous dans un espace S_3 une congruence (UV) dont U, V sont les foyers, c'est-à-dire une suite de LAPLACE L. On peut choisir deux points J, J' de la droite UV décrivant des réseaux conjugués à la congruence (UV). On peut alors construire un espace S_5 en partant de S_3 comme on a construit S_{r+2} en partant de S_r, puis la suite de LAPLACE L'.

Les plans $U_1' U' V'$, $V_1' V' U'$ coupent S_3 aux points A, B et les congruences (UV), (AB) sont stratifiables dans un sens.

L'espace à quatre dimensions $U_2' U_1' U' V' V_1'$ coupe S_3 suivant le plan $A_1 AB$ et d'autre part rencontre la droite S_1 en un point D. Si la droite joignant ce point D au point U' coupe S_3 en un point, celui-ci appartient d'une part au plan $A_1 AB$ et d'autre part au plan $S_1 U$; c'est donc le point U. Alors, les congruences (UV) et (AB) sont doublement stratifiables.

On en conclut que pour que les congruences (UV) et (AB) soient doublement stratifiables, il faut que la droite joignant le point de rencontre de S_1 avec l'espace $U_2' U_1' U' V' V_1'$ au point U', coupe S_3 en un point U.

Cette condition peut s'exprimer analytiquement de la manière suivante:

Appelons $X^0, X^1, X^2, X^3, X^4, X^5$ les coordonnées d'un point de S_5. Le point D est donné par

$$\begin{vmatrix} U_2^0 & U_2^1 & U_2^2 & U_2^3 & \mu_2 & \mu_2' \\ U_1^0 & U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 & \mu_1 & \mu_1' \\ U^0 & U^1 & U^2 & U^3 & \mu & \mu' \\ V^0 & V^1 & V^2 & V^3 & \lambda & \lambda' \\ V^0_1 & V^1_1 & V^2_1 & V^3_1 & \lambda_1 & \lambda_1' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X^4 & X^5 \end{vmatrix} = 0$$

$$X^0 = X^1 = X^2 = X^3 = 0 \ .$$

D'autre part, la condition pour que les points U, U', D soient situés sur une même droite est

$$\mu' X^4 - \mu X^5 = 0 .$$

La condition cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} U_2^0 & U_2^1 & U_2^2 & U_2^3 & \mu\mu_2' - \mu'\mu_2 \\ U_1^0 & U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 & \mu\mu_1' - \mu'\mu_1 \\ U^0 & U_2 & U^2 & U^3 & 0 \\ V^0 & V_1 & V^2 & V^3 & \mu\lambda' - \mu_{,}\lambda \\ V_1^0 & V_1^1 & V_1^2 & V_1^3 & \mu\lambda'_1 - \mu'\lambda_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Cette condition est évidemment suffisante.