GODEAUX, L.
Math. Annalen 150, 79—84 (1963)

Construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est supérieur à l'unité

Au Prof. VAN DER WAERDEN, pour son 60e anniversaire

Par
LUCIEN GODEAUX à Liége

Rappelons tout d'abord la définition du diviseur de Severi d'une surface en nous limitant aux systèmes linéaires de courbes. Il peut exister, sur une surface algébrique F, un certain nombre de systèmes linaires de courbes, $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_r|$, distincts, dont les multiples suivant λ appartiennent à un même système linéaire, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$|\lambda C_1| = |\lambda C_2| = \cdots = |\lambda C_r| .$$

Le maximum du nombre λ est le diviseur σ de la surface; il est indépendant du choix des systèmes linéaires considérés et du nombre λ (qui est un diviseur de σ). Il est bien évident que les surfaces pour lesquelles on a $\sigma > 1$ sont exceptionnelles.

Lorsque Severi introduisit la notion de diviseur d'une surface[1]), une seule surface dont le diviseur était supérieur à l'unité était connue: la surface F d'Enriques du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre T, dont le diviseur est $\sigma = 2$.

Désignons par $|C_1|$ le système des sections planes de F et par $|C_2|$ le système des courbes du sixième ordre découpées sur F, en dehors des arêtes de T, par les surfaces cubiques passant par ces arêtes. On a

$$|2C_1| = |2C_2| = |C| ,$$

les courbes du système $|C|$ étant decoupées, en dehors des arêtes de T, par les surfaces du sixième ordre passant deux fois par ces arêtes (celles des surfaces qui découpent les courbes $2C_1$ sont formées des faces de T et des quadriques de l'espace). ENRIQUES a démontré[2]) que la surface F, dont les genres sont $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont tous les genres sont égaux à

[1]) SEVERI: *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Ann. sci. école normale supér. 1908, pp. 449—468).

[2]) La surface d'ENRIQUES a été signalée par CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* (Mem. soc. Italiana sci., 1896, pp. 103—123 et *Opere Scelte*, pp. 307—334. Bologna: Zanichelli 1937. Son étude a été reprise par ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Mem. soc. Italiana sci. 1906, pp. 327—352), *Un'osservazione relativa alle superficie de bigenere uno* (Rend. Accad. Bologna, 1907—1908, pp. 40—45; *Opere Scelte*, tome II, pp. 214—272, 303—306. Bologna: Zanichelli 1959.

l'unité ($p_a = P_4 = 1$). Cette remarque nous a permis de construire des surfaces dont le diviseur de Severi est un nombre quelconque. Rappelons rapidement le résultat que nous avons obtenu[3]).

Soit F' une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre p, privée de points unis. On peut construire sur F', d'une infinité de manières, un système linéaire complet $|C'|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|C'_1|$, $|C'_2|, \ldots, |C'_p|$ appartenant à l'involution I. A ces systèmes correspondent sur la surface F image de l'involution I, p systèmes linéaires complets $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ certainement distincts. A une courbe C' quelconque correspond sur la surface F une courbe $\overline{C}$ possédant un certain nombre de points doubles provenant des couples de points de la courbe C' appartenant à un même groupe de l'involution I. A la courbe $\overline{C}$ correspondent sur F' la courbe C' et ses transformées par la transformation birationelle de F' en soi génératrice de I et ses puissances. Lorsque la courbe C' varie dans $|C'|$, la courbe $\overline{C}$ engendre un système rationnel dont les courbes appartiennent totalement à un système linéaire $|C|$. Faisons varier C' d'une manière continue dans $|C'|$ en la faisant tendre vers une courbe C'_1. Alors la courbe $\overline{C}$ varie d'une manière continue dans $|C|$ et tend vers une courbe C_1 comptée p fois. La courbe pC_1 appartient donc à $|C|$. En faisant tendre C' vers une courbe C'_2, ou $C'_3, \ldots$, ou C'_p, on voit que l'on a

$$|C| = |pC_1| = |pC_2| = \cdots = |pC_p|\,.$$

Il en résulte que le diviseur de Severi de la surface F est multiple de p et précisément, si F' a le diviseur un, celui de F est $\sigma = p$.

Dans cette note, en utilisant un tout autre procédé, nous construisons des surfaces de diviseur supérieur à l'unité. Précisément, les surfaces obtenues représentent les couples de points non ordonnés de certaines courbes algébriques[4]). Nous montrons ensuite que dans le cas du diviseur deux, la surface pourrait être obtenue en appliquant le théorème précédent, mais qu'il n'en est plus de même lorsque le diviseur est supérieur à deux.

Nous nous sommes borné à la consideration des systèmes linéaires pour plus de concision, mais l'extension aux systèmes continus non linéaires ne présente guère de difficulté.

1. Rappelons tout d'abord quelques propriétés de la surface F qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe L de genre $\pi > 1$, surface étudiée par DE FRANCHIS[5]) et SEVERI[6]).

[3]) *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (Bull. Acad. sci. Cracovie, 1914, pp. 362—368). Voir aussi notre exposé *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scientifiques, N° 270 (Paris: Hermann 1935) et *Theorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications*, en cours d'impression dans la Collection de Monographies Mathématiques du Consiglio Nazionale delle Richerche d'Italie.

[4]) Nous avons signalé l'existence de ces surfaces dans des communications à l'Académie royale de Belgique (mai et juin 1962).

[5]) DE FRANCHIS: *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due o di una curva algebrica* (Rend. Circ. Mat. Palermo, 1903, pp. 104—121).

[6]) SEVERI: *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti Accad. Torino, 1902—1903, pp. 185—200), *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Mem. Accad. Torino, 1903, pp. 1—49).

Aux couples de points de la courbe L contenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe H de genre π. Cette courbe appartient à un système continu $\{H\}$ de dimension un et d'indice deux. L'enveloppe de ce système $\{H\}$ est la courbe K qui représente les couples de points de L formés de deux points coincidents. Nous dirons qu'à un point P de L correspond une courbe H.

La surface F a les genres

$$p_g = \frac{1}{2}\pi(\pi-1), \quad p_a = \frac{1}{2}\pi(\pi-1) - \pi, \quad p^{(1)} = (\pi-1)(4\pi-9)+1 .$$

Considérons sur la courbe L une série linéaire $|G|$ de groupes de n points et de dimension r. Aux points d'un groupe de $|G|$ correspondent sur $F n$ courbes $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Lorsque le groupe G varie, la courbe

$$M = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$$

engendre un système continu. Eh bien, SEVERI a démontré que la courbe M appartient totalement à un système lineaire $|M|$, irréductible, de degré n^2, de genre $n(\pi-1) + \frac{1}{2}n(n-1)+1$ et de dimension $\frac{1}{2}r(r+3)$. De plus, si la série $|G|$ est non spéciale, le système $|M|$ est régulier.

C'est ce théoreme qui va nous être utile.

2. Supposons que la courbe L, de genre $\pi > 2$, représente une involution cyclique I, d'ordre p, privée de points unis, appartenent à une courbe L' de genre π'. On a

$$\pi' - 1 = p(\pi-1) .$$

Nous désignerons par τ la transformation birationnelle de la courbe L' en soi, génératrice de l'involution I.

Soit, sur L, un système linéaire $|G_1|$, de groupes de n points, non spécial et par conséquent de dimension $r = n - \pi$ Aux groupes de $|G_1|$ correspondent sur L' des groupes G_1' de pn points, appartenant à une série linéaire $|G_1'|$.

La série $|G_1'|$ est certainement non spéciale, car à la série canonique de L correspond la série canonique de L'. Par conséquent, $|G_1'|$ appartient totalement à une série complète $|G'|$ d'ordre pn et de dimension $pn - \pi'$.

La transformation τ de L' en soi transforme les groupes de $|G_1|$ chacun en soi, par conséquent elle transforme un groupe de $|G'|$ en un groupe de $|G'|$, distinct ou non du précédent.

La transformation τ agit sur les groupes de $|G'|$ comme une homographie sur les points d'un espace à $np - \pi'$ dimensions. Comme on a $np - \pi' > n - \pi$, il existe certainement dans $|G'|$ des séries linéaires partielles, distinctes de $|G_1'|$, appartenant à l'involution I. Soient $|G_2'|, |G_3'|, \ldots, |G_t'|$ ces séries.

A une de ces séries correspond sur L une série complète d'ordre n, non séciale, de dimension $n - \pi$ Les séries partielles $|G_2'|, |G_3'|, \ldots, |G_t'|$ ont donc, comme $|G_1'|$, la dimension $n - \pi$.

D'après la théorie des homographies cycliques, on doit avoir

$$t(n-\pi) + t = pn - \pi' + 1 = p(n-\pi) + p ,$$

d'où $t = p$

Ainsi donc, il existe sur L, p séries linéaires $|G_1|, |G_2|, \ldots, |G_p|$, non spéciales, d'ordre n et de dimension $n - \pi$, auxquelles correspondent sur L' p séries partielles $|G'_1|, |G'_2|, \ldots, |G'_p|$ appartenant à une même série linéaire $|G'|$ complète.

A un groupe G' quelconque correspond sur L un groupe $\overline{G}$ de np points et à ce groupe correspondent sur L' le groupe G' et ses transformés par $\tau, \tau^2, \ldots, \tau^{p-1}$. Les groupes $\overline{G}$ forment une série rationnelle appartenant donc totalement à une série linéaire $|G|$. Lorsque G' varie d'une manière continue dans $|G'|$ et tend vers un des groupes $G'_1, G'_2, \ldots, G'_p$, le groupe $\overline{G}$ varie d'une manière continue dans $|G|$ et tend respectivement vers un des groupes $G_1, G_2, \ldots, G_p$ compté p fois. On a donc

$$|G| = |pG_1| = |pG_2| = \cdots = |pG_p| \, .$$

3. Aux points d'un groupe G_i correspondent sur $F n$ courbes H que nous désignerons par $H_{i1}, H_{i2}, \ldots, H_{in}$. Nous poserons ensuite

$$C_i \equiv H_{i1} + H_{i2} + \cdots + H_{in} \, , \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \, .$$

Aux points d'un groupe G correspondent pn courbes $H_1, H_2, \ldots, H_{pn}$ et nous poserons

$$C \equiv H_1 + H_2 + \cdots + H_{pn} \, .$$

Lorsque le groupe G tend vers un groupe G_1 par exemple, l'ensemble des courbes $H_1, H_2, \ldots, H_{pn}$ tend vers le groupe des courbes $pH_{11}, pH_{12}, \ldots, pH_{1n}$, par conséquent une courbe C tend vers une courbe pC_1 et cette courbe appartient donc au système $|C|$.

On démontre de même que les courbes $pC_2, pC_3, \ldots, pC_p$ appartiennent au système $|C|$. On a donc

$$|C| = |pC_1| = |pC_2| = \cdots = |pC_p|$$

et le diviseur de Severi de la surface F est donc $\sigma = p$.

Si $|D_1|$ est un autre système linéaire de courbes tracées sur F, les systèmes

$$|D_2| = |D_1 + C_1 - C_2|, \; |D_3| = |D_1 + C_1 - C_3|, \ldots, |D_p| = |D_1 + C_1 - C_p|$$

sont tels que l'on a

$$|pD_1| = |pD| = \cdots = |pD_p| \, .$$

Si une courbe algébrique L de genre $\pi > 2$ est l'image d'une involution cyclique d'ordre p privée de points unis appartenant à une courbe L', la surface représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L a le diviseur de Severi $\sigma = p$.

En général, la courbe L est à modules particuliers. Si $\pi = 3$ cependant, la courbe L est à modules généraux, car une courbe de genre trois est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une courbe de genre cinq. Par conséquent, *la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre trois a le diviseur de Severi $\sigma = 2$.*

4. Soit F' la surface représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L'. Elle a les genres

$$p'_g = \frac{1}{2} p(\pi - 1) \, [p(\pi - 1) + 1], \; p'_a = \frac{1}{2} \, [p(\pi - 1) + 1] \, [p(\pi - 1) - 2] \, ,$$

$$p'^{(1)} = p(\pi - 1) \, [4p(\pi - 1) - 5] + 1 \, .$$

A un point P de F' correspondent deux points P_1, P_2 de L'. Soient P'_1, P'_2 les points que τ fait correspondre à ces points et P' le point homologue sur F'. Le point P' correspond au point P dans une transformation birationnelle cyclique T de F' en soi, de période p. Cette transformation engendre sur F' une involution J d'ordre p. Nous désignerons par F'' une surface image cette involution. Nous avons étudié ailleurs cette surface[7]).

Les points P_1, P_2 de L' qui correspondent à un point P de F' déterminent deux groupes de l'involution I. Aux couples de points de L' pris un dans chacun de ces groupes correspondent p^2 points de F' et lorsque P varie, ces p^2 points engendrent une involution J'. Chacun des groupes de cette involution est composé de p groupes de l'involution J.

Aux groupes de l'involution J' correspondent sur F'' des groupes de p points formant une involution J'', en général non cyclique. La surface F des couples de points de la courbe L est une image de l'involution J' et par conséquent de l'involution J''.

5. Supposons en premier lieu $p = 2$. Aux couples de l'involution I correspondent sur F' les points d'une courbe K'_0 unie pour l'involution J. L'involution I étant privée de points unis, les courbes K'_0 et K', qui représente les couples de points de L' formés de deux points coincidents, ne se rencontrent pas.

Observons que la courbe K' appartient à l'involution J. Désignons par K'' la courbe qui correspond à K' sur F'' et par K''_0 la courbe qui correspond à K'_0. Les courbes K'' et K''_0 ne se rencontrent pas et à un groupe de l'involution J' formé de deux points de K' et d'un point de K'_0 compté deux fois correspondent sur F'' deux points situés l'un sur K''_0, l'autre sur K''. Ces courbes sont donc conjuguées dans l'involution J'', qui est actuellement involutive. Aux courbes K'', K''_0 correspond sur F la courbe K.

Supposons que l'involution J'' possède un point uni P''. Ce point ne peut appartenir ni à K'', ni à K''_0. Il ne peut lui correspondre deux points distincts de l'involution J, par conséquent il lui correspond sur F' un point uni également pour J, non situé sur K'_0. Or, l'involution I sur L' ne possède aucun point uni, donc le point P'' ne peut exister.

On en conclut que la surface F représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface F'' ; elle a donc bien le diviseur de Severi $\sigma = 2$ d'après le théorème rappelé dans l'introduction.

6. Supposons maintenant $p > 2$. L'involution J sur la surface F' est actuellement privée de points unis et par conséquent la surface F'' image de cette involution a le diviseur de Severi $\sigma = p$.

La surface F est l'image d'une involution J'' appartenant à la surface F'' et ces deux surfaces ont le même diviseur. C'est une propriété que l'on ne peut obtenir directement. Il importe cependant de montrer qu'il n'y a pas contradiction et nous montrerons que l'on peut construire sur F'' p systèmes linéaires

---

[7]) *Sulla costruzione di certe superfice algebriche irregolari* (Rend. Accad. Naz. Lincei, 1° sem. 1949, pp. 694—696), *Costruzione di superficie algebriche irregolari* (Atti Convegno internazionale di Geometria algebrica, Torino, 1961, pp. 63—74).

auxquels correspondent sur F les p systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$. Nous supposerons pour commencer p impair.

Appelons H' les courbes qui représentent sur F' les groupes de deux points de L' dont l'un est fixe. Les ∞^1 courbes H' forment un système continu $\{H'\}$ de degré un et d'indice deux, ayant comme enveloppe la courbe K'.

Soient M_1, M_2 deux groupes de l'involution I sur L'. Désignons par $H'_{11}, H'_{12}, \ldots, H'_{1p}$ les courbes H' correspondant aux points de M_1 et par $H'_{21}, H'_{22}, \ldots, H'_{2p}$ celles qui correspondent aux points de M_2. Les premières courbes coupent les secondes aux p^2 points d'un groupe de l'involution J'. Lorsque M_2 tend vers M_1, p points de ce groupe tendent vers p points de la courbe K' formant un groupe de J et les autres tendent vers les $\frac{1}{2}\,p(p-1)$ communs aux courbes $H'_{11}, H'_{12}, \ldots, H'_{1p}$ prises deux à deux, comptés chacun deux fois. Ces $\frac{1}{2}\,p(p-1)$ points sont donc des points unis de J', leur lieu est une courbe K'_0 unie pour J'.

Au groupe de J' qui vient d'être considéré correspond sur F'' un groupe de J'' formé d'un point de la courbe K'' homologue de K' et de $\frac{1}{2}\,p(p-1)$ points de la courbe K''_0 homologue de K'_0, comptés deux fois (points unis de J''). On en conclut que l'involution J'' ne peut être cyclique.

Reprenons sur la courbe L' la série linéaire $|G'|$ qui contient p séries linéaires partielles $|G'_1|, |G'_2|, \ldots, |G'_p|$ appartenant à l'involution I. Posons $pr = m$ et appelons $H'_{i1}, H'_{i2}, \ldots, H'_{im}$ les courbes qui correspondent aux points d'un groupe de la série $|G'_i|$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$. La courbe

$$H'_{i1} + H'_{i2} + \cdots + H'_{im}$$

appartient à l'involution J' et dans le système linéaire qu'elle détermine, il existe certainement un système linéaire partiel appartenant à l'involution J'; appelons le $|C'_i|$.

Les systèmes $|C'_1|, |C'_2|, \ldots, |C'_p|$ appartiennent à un même système linéaire, celui qui est déterminé par les courbes sommes des courbes H' correspondant aux points des groupes de $|G'|$.

Les systèmes en question appartenant à l'involution J', appartiennent également à l'involution J et il leur correspond sur la surface F'' des systèmes linéaires $|C''_1|, |C''_2|, \ldots, |C''_p|$ tels que les courbes $pC''_1, pC''_2, \ldots, pC''_p$ appartiennent à un même système linéaire. Ces systèmes appartiennent à l'involution J'' et il leur correspond sur F les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ considérés plus haut.

Lorsque p est pair et par exemple égal à $2q$, on considèrera la surface obtenue en partant de l'involution du second ordre I' engendrée sur L' par τ^q, puis la surface obtenue en partant de l'involution cyclique d'ordre q existant sur la courbe image de l'involution I'. Et ainsi de suite si q est pair.

Dans tous les cas, si $p > 2$, on ne peut établir que F a le diviseur $\sigma = p$ en utilisant le théorème rappelé dans l'introduction et il faut une autre méthode, telle que celle que nous avons utilisée.

(Reçu le 30 septembre 1962)

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen