SIMON STEVIN, *Wis- en Natuurkundig Tijdschrift*
34e Jaargang, Aflevering III (Februari 1961)

CONSTRUCTION DE QUELQUES SURFACES ALGÉBRIQUES

LUCIEN GODEAUX (Liège)

La théorie des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, nous a permis de construire de nombreuses surfaces algébriques possédant des propriétés déterminées et de montrer par suite l'existence de ces surfaces (1). C'est ainsi que nous avons pu construire des surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque, alors que quand M. Severi a construit sa théorie, on ne connaissait qu'un seul exemple : celui de la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, dont le diviseur de Severi est égal à deux.

En considérant les surfaces du quatrième ordre invariantes pour la transformation birationnelle involutive dans laquelle deux points homologues sont conjugués par rapport aux quadriques d'un réseau, nous avons montré que parmi les surfaces images des involutions déterminées sur ces surfaces, se trouvaient des surfaces transformées birationnelles de la surface d'Enriques. On sait que dans la transformation envisagée, aux plans de l'espace correspondent les surfaces cubiques passant par une courbe fondamentale du sixième ordre et de genre trois. Les surfaces invariantes pour la transformation sont d'ordre $4n$ et passent n fois par la courbe fondamentale. On peut aussi considérer le cas particulier de la transformation où la courbe fondamentale est formée des

(1) Voir nos travaux : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scient., No 270 (Paris, Hermann, 1935), *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Colloque de Géométrie algébrique de Liège, pp. 177-195 (Paris, Masson et Louvain, Uytspruyts, 1949), *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et ses applications* (Bulletin de la Soc. des Sciences de Liège, 1957, pp. 3-15).

arêtes d'un tétraèdre. Une surface invariante pour cette transformation particulière est d'ordre $4n$ et passe $2n$ fois par les sommets du tétraèdre (sans passer par les arêtes) ou d'ordre $4n + 2$ et passe $2n + 1$ fois par les sommets du tétraèdre (sans passer par les arêtes). Sur chacune de ces surfaces, la transformation détermine des involutions du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis (zéro, quatre ou huit). Ce sont les images de ces involutions que nous étudions dans ce travail.

1. Considérons la transformation birationnelle involutive T

$$x_1x_1' = x_2x_2' = x_3x_3' = x_4x_4' \qquad (T)$$

qui fait correspondre aux plans les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre de référence $O_1O_2O_3O_4$ et ayant par conséquent des points doubles aux sommets de celui-ci. Aux droites, T fait correspondre les cubiques gauches passant par les sommets du tétraèdre.

Les arêtes opposées du tétraèdre de référence sont des droites fondamentales de seconde espèce associées.

Aux points infiniment voisins d'un sommet du tétraèdre de référence correspondent, dans une transformation quadratique, les points de la face opposée. D'une manière précise, aux points infiniment voisins de O_1 situés dans un plan correspondent les points d'une conique du plan $O_2O_3O_4$ passant par les points O_2, O_3, O_4 et aux points d'une droite de ce plan correspondent les points infiniment voisins de O_1 situés sur un cône du second ordre passant par les droites O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4.

Soit F une surface d'ordre m passant i_1 fois par O_1, i_2 fois par O_2, i_3 fois par O_3, i_4 fois par O_4. Dans quelles conditions cette surface est-elle transformée en soi par T?

Si nous appliquons T à la surface F, nous obtenons une surface d'ordre $3m - i_1 - i_2 - i_3 - i_4$. D'autre part, aux points de F infiniment voisins de O_1 correspondent, dans le plan $O_2O_3O_4$, les points de la section de F par ce plan. On a donc $m = 2i_1$ et de même, $m = 2i_2 = 2i_3 = 2i_4$. On en conclut que la surface F est d'ordre pair $2n$ et passe n fois par les sommets du tétraèdre de référence.

2. Les surfaces d'ordre le moins élevé invariantes pour T sont les quadriques

$$\lambda_1 (x_1x_2 \pm x_3x_4) + \lambda_2 (x_1x_3 \pm x_2x_4) + \lambda_3 (x_1x_4 \pm x_2x_3) = 0$$

qui forment deux réseaux suivant que l'on prend le signe $+$ ou le signe $-$. Appelons $|F_2|$ le premier de ces réseaux, $|F'_2|$ le second.

La transformation T possède huit points unis, à savoir

$A(1,1,1,1)$, $A_{12}(1,1,-1,-1)$, $A_{13}(1,-1,1,-1)$, $A_{14}(1,-1,-1,1)$ et

$A_1(-1,1,1,1)$, $A_2(1,-1,1,1)$, $A_3(1,1,-1,1)$, $A_4(1,1,1,-1)$.

Les quadriques F_2 passent par les points A_1, A_2, A_3, A_4 et les quadriques F'_2 par les points A, A_{12}, A_{13}, A_{14}.

Proposons-nous de déterminer les surfaces F d'ordre $4n$ passant $2n$ fois par les sommets du tétraèdre de référence, invariantes pour T.

Le nombre des coefficients d'un polynome d'ordre $4n$ en x_1, x_2, x_3, x_4 est égal à $\frac{1}{3}(2n+1)(4n+1)(4n+3)$. Le nombre des conditions pour qu'une surface possède un point multiple d'ordre $2n$ est $\frac{n}{3}(2n+1)(2n+2)$. Le nombre des coefficients de l'équation d'une surface F d'ordre $4n$ passant $2n$ fois par les sommets du tétraèdre de référence O_1, O_2, O_3, O_4 est par conséquent

$$\frac{1}{3}(2n+1)(4n+1)(4n+3) - \frac{4}{3}n(2n+1)(2n+2) =$$
$$= \frac{2n+1}{3}(8n^2+8n+3).$$

Soit $x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l$ un terme de cette équation. On a $i+j+k+l = 4n$ et les nombres i, j, k, l sont au plus égaux à $2n$.

A ce terme, T fait correspondre le terme

$$(x_1x_2x_3x_4)^{2n}\, x_1^{2n-i}\, x_2^{2n-j}\, x_3^{2n-k}\, x_4^{2n-l}.$$

On en conclut que l'équation de F doit être formée de termes de la forme

$$x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l \pm x_1^{2n-i}\, x_2^{2n-j}\, x_3^{2n-k}\, x_4^{2n-l},$$

où dans tous les termes on a le signe $+$ ou bien le signe $-$. Lorsque l'on applique T, l'équation transformée se retrouve multipliée par $(x_1x_2x_3x_4)^{2n}$.

Appelons F_{4n} les surfaces obtenues en prenant le signe $+$ et F'_{4n} les surfaces obtenues en prenant le signe $-$. L'équation de F_{4n} contient le terme $(x_1x_2x_3x_4)^n$. Celui-ci retiré, les équations de

F_{4n} et de F'_{4n} contiennent le même nombre de termes. Par conséquent, l'équation de F_{4n} contient $\frac{n}{3}(8n^2 + 12n + 7) + 1$ termes et celle de F'_{4n}, $\frac{n}{3}(8n^2 + 12n + 7)$ termes.

On vérifie sans peine que la surface F_{4n} ne passe par aucun des points unis de T tandis que la surface F'_{4n} passe par les huit points unis.

3. Considérons maintenant les surfaces F d'ordre $4n + 2$ passant $2n + 1$ fois par les points O_1, O_2, O_3, O_4 et invariante pour T.

Le nombre de termes d'une surface F satisfaisant à la première condition est

$$\frac{2}{3}(n + 1)(4n + 3)(4n + 5) - \frac{4}{3}(n + 1)(2n + 1)(2n + 3) =$$

$$= \frac{2(n + 1)}{3}(8n^2 + 16n + 9).$$

A un terme $x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l$ où $i + j + k + l = 4n + 2$, les nombres i, j, k, l étant au plus égaux à $2n + 1$, correspond le terme

$$(x_1x_2x_3x_4)^{2n+1}\, x_1^{2n+1-i}\, x_2^{2n+1-j}\, x_3^{2n+1-k}\, x_4^{2n+1-l}$$

L'équation de la surface F contient donc des termes de la forme

$$x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l \pm x_1^{2n+1-i} x_2^{2n+1-j} x_3^{2n+1-k} x_4^{2n+1-l},$$

les signes + ou — allant ensemble.

Appelons F_{4n+2} les surfaces obtenues en prenant le signe + et F'_{4n+2} celles qui sont obtenues en prenant le signe —.

Les surfaces F_{4n+2} et F'_{4n+2} contiennent le même nombre de termes, c'est-à-dire $\frac{n+1}{3}(8n^2 + 16n + 9)$.

Observons que le binome

$$x_1^i \ldots x_4^l + x_1^{2n+1-i} \ldots x_4^{2n+1-l}$$

s'annule aux points A_1, A_2, A_3, A_4 et que le binome

$$x_1^i \ldots x_4^l - x_1^{2n+1-l} \ldots x_4^{2n+1-l}$$

s'annule aux points A, A_{12}, A_{13}, A_{14}.

On en conclut que les surfaces F_{4n+2} passent par les points unis A_1, A_2, A_3, A_4 et les surfaces F'_{4n+2} par les points unis A, A_{12}, A_{13}, A_{14}.

4. Rappelons que si une surface algébrique F de genre arithmétique p_a et de genre linéaire $p^{(1)}$ contient une involution du second ordre présentant un nombre fini α de points unis, et si $p'_a, \pi^{(1)}$ sont les genres arithmétique et linéaire de la surface image de l'involution, nous avons établi que l'on a

$$4\,(p_a + 1) = 8\,(p'_a + 1) - \alpha,$$

$$p^{(1)} - 1 = 2(\pi^{(1)} - 1).$$

Observons que les surfaces F considérées ici sont régulières et que l'on a donc $p_a = p_g$.

Les adjointes d'ordre $4n - 4$ à la surface F_{4n} sont des surfaces passant $2n - 2$ fois par les sommets du tétraèdre de référence. Le nombre de leurs coefficients est égal au genre arithmétique p_a de F_{4n} et on a donc

$$p_a = \frac{2n-1}{3}(8n^2 - 8n + 3).$$

Si l'on désigne par Φ_{4n} une image de l'involution déterminée sur F_{4n} par T, le genre arithmétique p'_a de cette surface est ($\alpha = 0$)

$$p'_a = \frac{4}{3}\,n\,(n-1)\,(2n-1).$$

Le genre linéaire $p^{(1)}$ de F_{4n} est donné par le degré du système linéaire découpé par les adjointes d'ordre $4n - 4$. On a donc

$$p^{(1)} - 1 = 48n\,(n-1)^2$$

et par conséquent le genre linéaire de Φ_{4n} est

$$\pi^{(1)} - 1 = 24n\,(n-1)^2.$$

Le genre arithmétique et le genre linéaire de la surface F'_{4n} sont évidemment égaux à ceux de la surface F_{4n}. Si Φ'_{4n} est une surface image de l'involution engendrée par T sur F'_{4n}, comme on a $\alpha = 8$, les genres de cette surface sont donnés par

$$p'_a = \frac{n}{3}(8n^2 - 12n + 7), \qquad \pi^{(1)} - 1 = 24n\,(n-1)^2.$$

5. Les adjointes d'ordre $4n - 2$ aux surfaces F_{4n+2}, F'_{4n+2} passent $2n - 1$ fois par les points O_1, O_2, O_3, O_4. Le genre arithmétique de ces surfaces est donc

$$p_a = \frac{2n}{3}(8n^2 + 1).$$

Leur genre linéaire est donné par

$$p^{(1)} - 1 = 4(2n - 1)^2(2n + 1).$$

Les involutions engendrées par T sur F_{4n+2}, F'_{4n+2} ont chacune quatre points unis. Dans les deux cas on a $\alpha = 4$. Si nous désignons par Φ_{4n+2}, Φ'_{4n+2} les surfaces images de ces involutions, ces surfaces ont même genre arithmétique

$$p'_a = \frac{n}{3}(8n^2 + 1)$$

et même genre linéaire

$$\pi^{(1)} - 1 = 2(2n - 1)^2(2n + 1).$$

6. Considérons les surfaces F_4; elles ont les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$ et les surfaces Φ_4 ont les genres $p'_a = p_g = 0$, $\pi^{(1)} = 1$ et par conséquent le bigenre $P'_2 = 1$. Les surfaces F_4 possèdent une courbe canonique d'ordre zéro et les surfaces Φ_4 ne possèdent pas de courbe canonique, mais ont une courbe bicanonique d'ordre zéro.

Les surfaces F_4 dépendent de neuf paramètres. Rapportons les projectivement aux hyperplans d'un espace S'_9 à neuf dimensions. Aux couples de points de l'espace homologues dans T correspondent les points d'une variété V_3 de S_9.

Le degré du système $|F_4|$ étant égal à 32, la variété V_3 est d'ordre 16.

Considérons le point uni A et une surface F'_4. Cette surface passe en général simplement par A. On sait qu'un point uni d'une involution du second ordre sur une surface est de première espèce, c'est-à-dire que les points de la surface infiniment voisins du point uni sont eux-mêmes unis. En d'autres termes, T détermine sur la surface F'_4 considérée une involution pour laquelle sont unies toutes les directions issues de A.

Les surfaces F_4 découpent, sur la surface F'_4 considérée, un système linéaire composé au moyen de l'involution, sans points-base, et on sait que les courbes d'un tel système passant par le point uni A y acquièrent un point double ordinaire.

De tout ceci, on conclut que :

1. Les points infiniment voisins de A sont unis pour T, c'est-à-dire qu'à une droite passant par A, T fait correspondre une cubique gauche touchant cette droite en A.

2. Les surfaces F_4 passant par A y acquièrent un point double conique.

Cela étant, au point A correspond sur V_3 un point A' quadruple pour la variété, les sections hyperplanes du cône tangent à V_3 en A' étant des surfaces de Veronese.

Le même raisonnement est valable pour les autres points unis de T et la variété V_3 possède donc huit points quadruples.

Nous désignerons par α, α_1, α_2, α_3, α_4, α_{12}, α_{13}, α_{14} les variétés rationnelles, à deux dimensions, équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, à ces huit points quadruples, sur V_3.

Les sections hyperplanes de V_3 sont les surfaces Φ_4. Aux surfaces F_4 correspondent sur V_3 des surfaces Φ_4', de genres $p_a = P_4 = 1$, satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$2\,\Phi_4 \equiv 2\,\Phi_4' + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}. \qquad (1)$$

En effet, à une surface du quatrième ordre F passant doublement par les sommets du tétraèdre de référence correspond sur V_3 une surface Φ qui, lorsque F tend d'une manière continue vers une surface F_4 tend vers une surface $2\Phi_4$ et, lorsque F tend d'une manière continue vers une surface F_4', se réduit à une surface Φ_4' comptée deux fois, augmentée des composantes des points quadruples (points de diramation).

7. Les surfaces F_4' sont en nombre ∞^8. Rapportons les projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_8. Aux couples de points de l'espace conjugués par rapport à T correspondent les points d'une variété V_3', à trois dimensions, d'ordre 12, puisque le système $|F_4'|$à le degré 24.

Deux surfaces F_4' ont en commun une courbe d'ordre 16 passant simplement par le point A. Il en résulte que l'espace linéaire à six dimensions intersection des hyperplans qui correspondent aux surfaces F_4' considérées, rencontre en un point le lieu des points homologues sur V_3' des points de l'espace infiniment voisins de A. Ce lieu est donc un plan, que nous désignerons encore par α. Entre les variétés V_3 et V_3' nous avons en effet une correspondance birationnelle dans laquelle au domaine du point A' sur V_3 correspond le plan α sur V_3'.

Le même raisonnement est valable pour les autres points de diramation et la variété V_3' contient donc huit plans α, α_1, α_2, α_3, α_4, α_{12}, α_{13}, α_{14} qui ne se rencontrent pas deux à deux.

Les sections hyperplans de V_3' sont les surfaces Φ_4'. Aux surfaces F_4 correspondent sur V_3' des surfaces d'ordre 16 que nous désignerons encore par Φ_4 et qui ne rencontrent pas les plans $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{14}$.

La relation fonctionnelle (1) est évidemment toujours valable sur V_3'.

8. Occupons-nous maintenant des surfaces F_6 et F_6'. Ces surfaces ont le genre arithmétique $p_a = 6$ et le genre linéaire $p^{(1)} = 13$. Les surfaces Φ_6, Φ_6' ont le même genre arithmétique $p_a' = 3$ et le même genre linéaire $\pi^{(1)} = 7$.

Les courbes canoniques sont découpées sur les surfaces F_6, F_6' par les quadriques passant par les points O_1, O_2, O_3, O_4, par conséquent, les courbes bicanoniques sont découpées par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par ces points.

La surface F_6 passe par les points A_1, A_2, A_3, A_4 et par conséquent au système canonique de Φ_6 correspond sur F_6 le système découpé par les quadriques F_2'. Au système bicanonique de Φ_6 correspond sur F_6 le système découpé par les surfaces F_4.

La surface F_6' passe par les points A, A_{12}, A_{13}, A_{14}, donc au système canonique de Φ_6' correspond le système découpé sur F_6' par les quadriques F_2. Au système bicanonique de Φ_6' correspond le système découpé sur F_6' par les surfaces F_4.

On peut donc prendre pour modèles projectifs des surfaces Φ_6, Φ_6' des surfaces à sections bicanoniques tracées sur la variété V_3.

Sur la variété V_3, les surfaces Φ_6 et Φ_6' ont l'ordre 24. Elles donnent lieu à la relation fonctionnelle

$$2\,\Phi_6 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 2\,\Phi_6' + \alpha + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}.$$

La surface Φ_6 a des points doubles coniques en A_1', A_2', A_3', A_4' et la surface Φ_6' des points doubles coniques en A', A_{12}', A_{13}', A_{14}'.

Observons qu'à une quadrique F_2 correspond sur V_3 une surface Φ_2 du huitième ordre et à une quadrique F_2', une surface Φ_2'

d'ordre huit également. La surface Φ_2 a des points doubles coniques en A_1', A_2', A_3', A_4 et la surface Φ_2' en A', A_{12}', A_{13}', A_{14}'. On a d'ailleurs

$$\Phi_2 + \Phi_2' = \Phi_4'$$

Les surfaces Φ_2, Φ_2' engendrent des réseaux $|\Phi_2|$, $|\Phi_2'|$. Le premier découpe sur une surface Φ_6' le système canonique et le second découpe le système canonique sur Φ_6.

On a encore

$$2\,\Phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\,\Phi_2' + \alpha + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}.$$

Observons que l'ensemble de deux surfaces F_2, F_2' est une surface F_4 passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4. On a donc

$$\Phi_4 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2\,\Phi_2.$$

Un hyperplan de S_9 passant par une surface Φ_2 coupe encore V_3 suivant une surface Φ_2. Ces surfaces doivent former un réseau et par conséquent une surface Φ_2 appartient à un espace S_6 à six dimensions. De plus, il y a un hyperplan touchant la variété V_3 le long d'une surface Φ_2.

De même, on a

$$\Phi_4 - \alpha - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{14} = 2\,\Phi_2'$$

et les surfaces Φ_2' appartiennent à des espaces linéaires à six dimensions. Le long de chaque surface Φ_2', il y a un hyperplan touchant la variété V_3.

Liège, le 18 octobre 1960