Extrait de « Mathesis », t. LXIX, n^os 1-2-3, 1960.

UNE PROPRIÉTÉ DES DOUBLES SIXAINS D'UNE SURFACE CUBIQUE,

par LUCIEN GODEAUX (Liége).

Dans notre *Introduction à la Géométrie supérieure* (1), nous avons montré qu'une surface cubique générale étant donnée, il existe une surface du quatrième ordre coupant cette surface suivant les douze droites d'un double sixain. Dans cette note, nous nous proposons de donner une construction d'une telle surface.

1. Soient F une surface cubique générale et a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 les droites d'un sixain. On peut représenter la surface F point par point sur un plan σ de telle sorte qu'aux sections planes correspondent les cubiques de σ passant par six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, les domaines de ces points correspondant respectivement aux droites a_1, a_2, ..., c_2. Le fait que F est générale implique que les six points A_1, A_2, ..., C_2 sont indépendants.

(1) Liège, 1946, page 126.

Par un point P passent une droite s'appuyant sur a_1, a_2, une droite s'appuyant sur b_1, b_2, une droite s'appuyant sur c_1, c_2. Le lieu du point P tel que ces trois droites soient coplanaires peut-il être la surface F ? Nous répondrons par la négative en raisonnant par l'absurde.

Désignons par a, b, c les droites de F qui correspondent respectivement aux droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Ces trois droites sont dans un même plan. Par le point P commun aux droites a, b, doit passer une droite située dans le plan ab, s'appuyant sur c_1, c_2. Cette droite ne peut être que c. Mais alors, au point P correspond dans σ un point P′ commun aux droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. La surface F ne serait plus alors une surface générale, car A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 étant donnés, P′ est déterminé et C_2 devrait se trouver sur la droite $P'C_1$.

En général, les trois droites issues d'un point de F et s'appuyant sur a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2 ne sont pas coplanaires. Cette proposition sera précisée plus loin ([1]).

2. Considérons maintenant trois couples de droites a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2, deux à deux gauches. Nous supposerons de plus que les droites de deux couples ne sont pas génératrices de même mode d'une quadrique. Cherchons le lieu Φ des points tels que les droites issues de ce point et s'appuyant sur les droites de chaque couple, soient coplanaires.

Soient (X_1), (X_2) deux ponctuelles de même support x et α un plan quelconque. Par un point X_1, passe une droite s'appuyant sur a_1, a_2 et coupant α en un point A. Le lieu d'un point tel que les droites issues de ce point et s'appuyant sur b_1, b_2 et sur c_1, c_2 déterminent un plan passant par A est une surface cubique ([2]) déterminant sur x deux points X_2.

Inversement, par un point X_2 de x passe un plan déterminé par les droites s'appuyant sur b_1, b_2 et c_1, c_2, issues de X_2. Ce plan coupe α suivant une droite a', les droites s'appuyant sur a', a_1, a_2 forment une quadrique rencontrant x en deux points X_1.

Les ponctuelles (X_1), (X_2) sont donc liées par une correspon-

([1]) Si les droites a, b, c passent par un même point P, elles sont situées dans le plan tangent à F en P. Ce point est appelé point d'Eckardt. De tels points ne peuvent exister que sur des surfaces particulières. Voir sur cet objet nos notes : *Sur les droites d'une surface cubique* (Mathesis, 1933, pp. 333-339), *Sur les points d'*Eckardt *d'une surface algébrique* (Mathesis, 1951, pp. 253-256). Voir aussi E. Ciani, *Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche* (Rendiconti Accademia dei Lincei, 1° sem. 1935 ; *Scritti geometrici scelti*, tome II, Padova, Cedam, 1937).

([2]) Voir notre *Introduction à la Géométrie supérieure*, p. 17. Le théorème est dû à F. **Deruyts**.

dance (2, 3) et il y a cinq points unis. Soit A′ le point d'intersection de x et de α. Ce point est uni et compte exactement pour un point uni, car il est simple pour la surface cubique et pour la quadrique dont il vient d'être question. Les autres points unis sont des points de la surface Φ, qui est donc du quatrième ordre.

Il est facile de voir que les six droites données et les couples de droites s'appuyant sur les droites de deux couples appartiennent à la surface.

3. Supposons maintenant que les six droites $a_1, a_2, \dots, c_2$ forment un sixain sur une surface cubique générale F. Le raisonnement précédent subsiste sans aucune modification et la surface Φ, du quatrième ordre, passe par les droites du sixain.

Appelons a'_1 la droite du sixain complémentaire s'appuyant sur a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 et a'_2 celle qui s'appuie sur a_1, b_1, b_2, c_1, c_2. Les droites a'_1, a'_2 appartiennent à la surface Φ. Il en est de même des autres droites du sixain complémentaire.

On voit donc que la surface Φ, du quatrième ordre, coupe F suivant les droites d'un double sixain. De plus, les droites issues d'un point P de F, choisi en dehors des droites du double sixain, et qui s'appuyent sur a_1, a_2, sur b_1, b_2, sur c_1, c_2 ne sont jamais dans un même plan.

4. Soit Φ' une seconde surface du quatrième ordre coupant F suivant les droites du double sixain considéré. Les surfaces Φ et Φ' déterminent un faisceau et la surface de ce faisceau passant par un point de F n'appartenant pas à la base, contient cette surface et est complétée par un plan. On en conclut que la surface Φ appartient à un système linéaire de dimension quatre, contenant le système de dimension trois formé de la surface F et des plans de l'espace.