L. GODEAUX

(*dell'Università di Liegi*)

La géométrie italienne en Belgique [1]

Conferenza tenuta il 16 marzo 1954

SUNTO. — L'Autore esamina l'influenza della scuola geometrica italiana sugli studi di Geometria Algebrica in Belgio.

A l'aube du XX^e siècle, la Géométrie italienne était à peu près inconnue en Belgique. Certains géomètres, comme LEPAIGE et FRANÇOIS DERUYTS, avaient sans doute étudié les involutions et les homographies unicursales, sur une courbe rationnelle; ils s'étaient rencontrés avec CASTELNUOVO, mais alors que celui-ci passait immédiatement à l'étude des séries linéaires sur une courbe de genre quelconque, mes compatriotes ne l'avaient pas suivi. Il n'était pas question, ni dans les cours de Géométrie supérieure, ni dans les travaux publiés à l'époque, de transformations birationnelles: les recherches de l'Ecole de Cremona étaient ignorées.

Seul STUYVAERT, qui professa la Géométrie supérieure, vers la fin de sa vie, à l'Université de Gand, s'était intéressé à quelques travaux italiens. Ce géomètre s'était proposé d'étudier les congruences linéaires de cubiques gauches, problème qui avait déjà retenu l'attention de VENERONI. STUYVAERT fut ainsi conduit à la représentation des courbes et variétés algébriques par des matrices de formes, question qui a été étudiée par C. SEGRE et M. GIAMBELLI. C'est par STUYVAERT que, à l'époque où vers 1907 je commençai à étudier la Géométrie, je fus conduit à m'intéresser à ce qui se faisait en Italie.

Les premières recherches que j'étudiai furent celles de MONTESANO sur les congruences linéaires de coniques. MONTESANO avait complètement déterminé celles-ci en remarquant qu'elles peuvent

(1) Conférence faite à l'Istituto Matematico del Politecnico di Milano, le 16 mars 1954

être engendrées au moyen de faisceaux ou de réseaux de surfaces à sections planes rationnelles ou elliptiques. Cela me conduisit à l'étude des nombreux travaux des géomètres italiens qui eurent pour objet la détermination des surfaces algébriques dont on donne le genre des sections planes et la théorie connexe des systèmes linéaires de courbes planes. Et naturellement, je fus amené à l'étude des transformations birationnelles.

En consultant un jour un volume des Atti dell'Accademia di Torino, j'eus l'occasion de lire la note où Enriques établit les premiers éléments de la théorie des surfaces algébriques et où, notamment, il introduit le système canonique au moyen des systèmes jacobiens des systèmes linéaires de courbes. Je fus tout de suite séduit tant par l'élégance de la méthode que par la profondeur des résultats obtenus et j'entrepris l'étude de la Géométrie sur une courbe et sur une surface algébriques. Mais il était bien difficile à cette époque, pour un jeune homme isolé, d'étudier ces questions. Passe encore pour la théorie des courbes algébriques: M. Severi venait de publier un cours fait sur cet objet à Padoue, ouvrage qui fut plus tard traduit en langue allemande. Mais pour les surfaces, il n'existait aucun ouvrage didactique et il fallait avoir recours aux mémoires disséminés dans les publications italiennes, qu'il était parfois bien difficile de se procurer en Belgique.

Le hasard fait parfois bien les choses: il existe à Bologne une fondation belge, fort ancienne, le « Collegio dei Fiaminghi ». J'eus la chance d'être mis en rapport avec un élève de ce Collège, le Dr Sluys, qui étudiait alors la Médecine à Bologne. Et celui-ci réussit à me mettre en rapport avec Enriques. Ce dernier écrivit au jeune étudiant que j'étais à l'époque, avec un extrëme bienveillance, que si je voulais étudier la Géométrie sur une surface algébrique, il me conseillait de venir en Italie, ajoutant qu'il m'accueillerait volontiers comme élève. C'est ce qui explique que, dès mon doctorat acquis en Belgique, je vins, en 1912, travailler à Bologne sous la direction d'Enriques.

Je n'ai pas à vous dire ce qu'était l'enseignement d'Enriques. Chaque matin, nous allions, M. Chisini, alors son assistant, et moi, chercher le Maître soit chez lui, soit à l'Université lorsqu'il y avait fait cours. Et c'était alors, sous les portiques de la vieille cité, d'interminables promenades où nous étions initiés aux difficultés de la Géométrie sur une surface algébrique. Parfois aussi, l'entretien portait sur quelque question de philosophie ou de logique.

Je m'excuse de ce long préambule, où j'ai dû peut-être parler un peu trop de moi. Mais avant de passer à l'exposé des recherches faites en Belgique, je voudrais cependant encore ajouter quelques mots: Si j'ai reçu en Italie l'accueil le plus bienveillant de la part d'Enriques, les autres géomètres de l'époque, parmi lesquels je citerai E. Bertini, C. Segre, C. Castelnuovo, G. Fano et M. Severi, me furent aussi très accueillants. Avec les jeunes: R. Torelli, C. Rosati, A. Comessatti, aujourd'hui hélas disparus, et surtout avec M. Chisini, je nouai de solides relations d'amitié. Ce sont des souvenirs qu'il m'est agréable de rappeler, parce qu'il s'y mêle des sentiments de reconnaissance.

A l'époque où je vins à Bologne, en 1912, Enriques et M. Severi venaient de publier leur remarquable mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (Prix Bordin); ils y avaient notamment étudié les surfaces images des involutions cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard. Enriques m'engagea à étudier les involutions analogues appartenant à une surface que nous dirons brièvement de genres un, caractérisée par le fait qu'elle est régulière et que ses courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Je pourrais dire que toutes mes recherches de Géométrie algébrique ont ce travail pour base. Plus tard, je fus en effet conduit à l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique quelconque. J'aurai l'honneur de vous parler de ces recherches dans les deux conférences suivantes et je ne m'y arrêterai pas aujourd'hui. Qu'il me soit permis seulemment de dire qu'elles m'ont conduit à demontrer l'existence de quelques surfaces, telles que:

a) Les surfaces dont le diviseur de Severi est un entier quelconque.

b) Les surfaces dépourvues de système canonique, mais ayant
bi des courbes canoniques effectives

$$(p_a = p_g = 0, p^{(1)} = P_2 = 2).$$

c) Des surfaces de l'espace ordinaire dont les sections planes constituent le système canonique complet, appelées souvent surfaces canoniques, problème considéré aussi par M. Franchetta et, comme nous le verrons tantôt, par M. Burniat.

d) Des surfaces dont le système canonique possède des composantes fixes, non exceptionnelles.

e) Des surfaces irrégulières, représentant des involutions appartenant à la surface qui représente les couples de points d'une courbe algébrique.

Lorsque je fus, en 1925-1926, chargé de l'enseignement de la

Géométrie supérieure à l'Université de Liége, cet enseignement reçu naturellement l'empreinte que j'avais moi-même acquise en Italie: il fut nettement orienté vers la Géométrie algébrique. Je ne pouvais évidemment pas, faute de temps, enseigner la Géométrie sur une surface algébriques, mais je fis en sorte que mes élèves puissent, sans trop de difficultés, aborder ce genre d'étude. Tout en restant dans le cadre de la Géométrie projective, mes leçons eurent pour objet la théorie des courbes et de surfaces algébriques, en utilisant naturellement la Géométrie hyperspatiale, et la théorie des transformations birationnelles. Au cours de ma carrière professorale, j'ai eu la joie de former quelques élèves et je vais maintenant parler de leurs travaux.

Les premiers travaux de M. Burniat ont porté sur la théorie des transformations birationnelles de l'espace. L'auteur part d'un système homaloïdal dont les surfaces ont, en un point-base, des contacts d'une nature déterminée; il parvient à determiner les transformations birationnelles ainsi obtenues. Il s'est ensuite occupé de déterminer les différents modèles projectifs de la surface d'Enriques, surface dont le modèle le plus simple est la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Cette surface est dépourvue de courbe canonique, mais possède une courbe bicanonique d'ordre zéro.

Nous avons fait allusion il y a un instant aux surfaces canoniques de l'espace ordinaire et dit que leur détermination avait fait l'objet de recherches de M. Franchetta et de nous-même, par des méthodes du reste différentes. Ni l'un ni l'autre n'avons d'ailleurs pu obtenir des surfaces de genre linéaire supérieur à 10. M. Burniat a abordé le problème par une troisième méthode. Il remarque que dans certains systèmes continus de surfaces algébriques irréductibles, il peut exister des surfaces multiples. Il construit une surface multiple canonique et parvient, dans certains cas, à remonter à un système continu de surfaces irréductibles, dont la surface multiple fait partie, et qui sont des surfaces canoniques. Il a ainsi montré l'existence de surfaces canoniques dont le genre linéaire peut prendre une des valeurs de 11 à 17. D'autres résultats sont en cours de publication.

M. Burniat a également réussi à déterminer des surfaces dont le système canonique possède des composantes fixes non exceptionnelles.

Ajoutons que M. Burniat, fut, pendant quelques mois, l'élève d'Enriques à l'Université de Rome.

C'est aussi à la théorie des transformations birationnelles que ressortissent les premiers travaux de M. DERWIDUÉ. Considérant les transformations birationnelles hyperspatiales, il a généralisé la théorie des courbes fondamentales de seconde espèce, montrant l'existence effective des êtres géométriques obtenus par des constructions ingénieuses d'exemples.

On sait que CASTELNUOVO a déterminé les transformations birationnelles du plan ayant une courbe unie de genre supérieur à l'unité. Le cas où la courbe est rationnelle ou elliptique a été l'objet de recherches de M. POMPILJ et de M. DERWIDUÉ. Ce dernier a ensuite cherché à étendre à l'espace la méthode de CASTELNUOVO. Il a ainsi été conduit à l'étude des transformations birationnelles qui ont, soit un faisceau de surfaces, soit une congruence linéaire de courbes invariantes pour la transformation.

M. DERWIDUÉ s'est ensuite attaqué au problème de la transformation birationnelle d'une variété algébrique en une variété privée de points singuliers. Ce probléme, assez simple lorsque la variété est une courbe, devient déjà très difficile lorsque l'on passe aux surfaces. Dans ce cas, il a été résolu par M. BEPPO LEVI et a en outre fait l'objet de nombreuses recherches, notamment de la part de M. CHISINI. M. DERWIDUÉ n'a sans doute pas pu résoudre le problème dans toute sa généralité, mais il a fait quelques remarques ingénieuses qui seront probablement utiles dans la suite.

C'est par des travaux de Géométrie projective, notamment sur les congruences linéaires de courbes, qu'a débuté M. JONGMANS, mais il s'est rapidement tourné vers la Géométrie algébrique. Ses premières recherches ont porté sur la détermination des surfaces et des variétés algébriques à trois dimensions dont les courbes sections ont le genre trois ou quatre, problème dans la solution duquel il s'est rencontré avec M. MORIN.

M. JONGMANS s'est ensuite occupé de la détermination du nombre des modules d'une surface algébrique, parvenant à établir une limite supérieure de ce nombre. Il a établi certaines inégalités entre les genres géométrique, arithmétique et linéaire d'une surface algébrique, améliorant des inégalités dues à ROSENBLATT et à M. B. SEGRE. Ces recherches ont retenu l'attention de CASTELNUOVO. Il a également étudié les séries abéliennes de groupes de points appartenant à une courbe algébrique, séries introduites récemment par M. SEVERI. Enfin, il a cherché à déterminer dans quelles conditions une variété algébrique est l'intersection complète de formes.

Depuis, M. JONGMANS s'est tourné vers l'étude de questions concernant les variétés kählériennes, où sa profonde connaissance des méthodes de la Géométrie algébrique lui est fort utile.

Nous avons fait allusion tantôt à un théorème de MONTESANO sur les congruences linéaires de coniques. M. NOLLET, considérant les congruences linéaires de cubiques gauches, a montré que si une telle congruence possède une courbe singulière le long de laquelle il n'y a pas contact des cubiques avec une surface passant par la courbe, la congruence peut être engendrée soit par un faisceau, soit par un reseau de surfaces dont les sections planes ont au plus le genre cinq. La méthode suivie est totalement différente de celle de MONTESANO, qui ne pouvait d'ailleurs pas être étendue au cas actuel.

M. NOLLET s'est ensuite occupé de la théorie des systèmes linéaires de courbes planes. C'est là une question qui, depuis plus de soixante ans, a beaucoup occupé les géomètres italiens; rappelons qu'elle a été placée sous son vrai jour, dans le groupe des transformations birationnelles, par CASTELNUOVO dans un mémoire datant de 1890. M. NOLLET a repris la question ab ovo, cherchant à lui donner une assiette définitive. Il a appliqué ensuite ses méthodes à la détermination des systèmes linéaires de genre donné, ou possédant certaines propriétés, dans plusieurs mémoires dont certains en collaboration avec M. JONGMANS. Ce dernier avait été conduit à des questions de ce genre par ses recherches sur les surfaces à sections de genre trois ou quatre, auxquelles il a été fait allusion plus haut.

Dans de nombreuses questions de Géométrie sur une surface algébrique, on est souvent conduit à considérer un système linéaire de courbes et à utiliser les propriétés d'une courbe générique de ce système pour une courbe particulière. Dans des recherches dont une partie seulement a été publiée, M. NOLLET s'est attaché à déterminer en toute rigueur quelles sont les particularités que l'on peut imposer à une courbe pour que les raisonnements du type précédent soient valables. Il donne de ses résultats plusieurs applications intéressantes et se propose de les appliquer à la classification des surfaces algébriques.

M. P. LIBOIS, professeur à l'Université de Bruxelles, a été l'élève d'ENRIQUES à l'Université de Rome. Il a étudié certains plans quadruples abéliens, et, avec un de ses élèves, M. DEFRISE, il a essayé d'introduire, en Géométrie algébrique, une notion invariantive du point, sans parvenir à résoudre ce délicat problème.

On doit à M. DEFRISE d'intéressantes recherches sur les courbes algébriques multiples, où il complète sur quelques points des résultats de COMESSATTI et de M. CHISINI. Il s'est également occupé des points unis des involutions non cycliques appartenant à une surface algébrique.

Dans toutes les recherches dont il vient d'être question, ce sont les méthodes de la géométrie italienne ou des méthodes dérivées qui sont utilisées. Ces recherches concernent toutes la Géométrie algébrique, mais il est un autre chapitre de la géométrie qui fut particulièrement étudié en Italie et qui a aussi été étudié en Belgique. Je veux parler de la Géométrie projective différentielle, qui a fait l'objet d'importantes recherches de la part de C. SEGRE, de G. FUBINI et de MM. BOMPIANI, TERRACINI, B. SEGRE, etc.

M. BOMPIANI a remarqué que les tangentes aux asymptotiques d'une surface ont pour images, sur l'hyperquadrique de KLEIN, deux points qui se correspondent dans une transformation de LAPLACE. Utilisant systématiquement la suite de LAPLACE déterminée par ces deux points, nous avons pu obtenir de nombreux résultats sur les surfaces, notamment sur celles dont les quadriques de LIE n'ont que deux ou trois points caractéristiques. Nous avons aussi attaché à chaque point d'une surface une suite de quadriques dont la première est la quadrique de LIE et pu étudier les congruences W. Nous avons été suivi dans cette voie par un de nos élèves, M. ROZET, aujourd'hui notre Collègue à l'Université de Liége. On sait qu'une congruence W est représentée, sur l'hyperquadrique de KLEIN, par une surface contenant un système conjugué. M. ROZET a étudié ces surfaces, mais il a tout particulièrement étudié les surfaces qui représentent des congruences non W. Il a montré qu'une telle surface contenait certains systèmes de courbes, généralisant dans un certain sens les systèmes conjugués, qui avaient été rencontrés par MM. BOMPIANI et B. SEGRE en se plaçant à un autre point de vue. On peut alors appliquer à la surface des transformations généralisant celle de LAPLACE, considérées également par MM. BOMPIANI et B. SEGRE. M. ROZET a déduit par ce procédé de nombreuses propriétés des congruences.

Les mathématiciens belges ont créé, en 1948, sur notre proposition, un *Centre de Recherches mathématiques*, largement subsidié par le gouvernement. Un des buts poursuivis est l'organisation de *Colloques* où nous invitons des mathématiciens étrangers à venir nous exposer l'état de questions déterminées, les méthodes qu'ils ont utilisées pour les attaquer, les résultats qu'ils ont obtenus et les problèmes qui restent à résoudre.

Des six Colloques qui ont été organisés jusqu'à présent, deux ont été consacrés à la Géométrie algébrique, un à la Géométrie différentielle. Au premier Colloque de Géométrie algébrique, tenu à Liége en 1949, M. SEVERI a brossé une brillante esquisse de la Géométrie algébrique italienne, montrant ce qu'on lui devait, ses méthodes et comment on pourrait aborder les problèmes qui restant à résoudre. M. B. SEGRE a montré l'appui que peut apporter la Géométrie algébrique à l'analyse diophantienne. Au second Colloque, tenu à Liége en 1952, M. CHISINI nous a exposé ses profondes recherches sur l'existence des plans multiples; le regretté Conforto nous a montré quelles étaient les questions résolues et à résoudre dans la théorie des fonctions abéliennes, qu'il a cultivée avec tant de succès. M. ANDREOTTI, dont les belles recherches sur les surfaces irrégulières venaient d'être couronnées par l'Académie royale de Belgique, a exposé la genèse de ses études. Enfin M. VILLA a parlé de ses travaux sur l'approximation des transformations ponctuelles par des transformations crémoniennes.

L'Itale était représentée au Colloque de Géométrie différentielle, tenu à Louvain en 1951, par MM. BOMPIANI et TERRACINI. Le premier nous a exposé ses recherches sur les Géométrie riemaniennes et sur la topologie des éléments différentiels. Le second a donné une vue d'ensemble de ses études sur les systèmes de plans dans l'hyperespace.

Ces Colloques ont été suivis par de nombreux mathématiciens belges, qui ont pu apprécier l'élégance et la finesse des méthodes de la Géometrie italienne ([1]).

Parvenu au terme de cet exposé, est-il besoin de vous dire mon sentiment sur la Géométrie italienne? Le fait que j'ai constamment appliqué ses méthodes et que j'ai enseigné à mes élèves à les utiliser me semble répondre à la question que l'on pourrait poser. Je tiens, en terminant, à vous dire la profonde vénération que j'ai pour mon Maître Federigo ENRIQUES; ce sera pour moi un grand honneur de pouvoir parler, demain, dans un Institut qui porte son nom.

SUMMARY. — The author gives an account of the connections between the Italian geometrical school and Belgian school of algebraic geometry.

([1]) Les conférences faites à ces Colloques ont été publiées (Liége, Thone et Paris, Masson).