SEMINARIO MATEMATICO DELL'UNIVERSITÀ DI FERRARA
Direttore: Prof. G. ZWIRNER

SULLE SUPERFICIE DI ORDINE $2n$ CON UNA CONICA MULTIPLA DI ORDINE n.

Nota di LUCIEN GODEAUX

Consideriamo una superficie algebrica F di ordine $2n$ con una conica γ multipla di ordine n. Supponiamo che questa superficie sia mutata in sè da una omologia ciclica di cui il piano di omologia sia quello della conica γ. Se la superficie non passa per il centro di omologia, l'involuzione generata da questa sopra F non ha che un numero finito di punti uniti, appartenenti alla conica γ.

Abbiamo studiato altrove il caso dove la omologia è armonica [1]. Qui vogliamo studiare il caso dove la omologia è ciclica di ordine primo dispari. Abbiamo così una applicazione interessante della teoria delle involuzioni appartenenti ad una superficie algebrica con un numero finito di punti uniti.

1. - Consideriamo una superficie algebrica F, di ordine $2n$, con una conica γ multipla di ordine n. Se

$$x_4 = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

sono le equazioni della conica γ, possiamo scrivere la equazione della superficie F sotto la forma

$$x_4^n f_n + x_4^{n-1} \varphi_2 f_{n-1} + \ldots + x_4^{n-k} \varphi_2^k f_{n-k} + \ldots + \varphi_2^n f_0 = 0,$$

dove f_h è una forma algebrica di grado h nelle x_1, x_2, x_3, x_4.

Se noi rapportiamo proiettivamente le quadriche passante per la conica γ agli iperpiani di uno S_4, alla superficie F corrisponde bira-

[1] *Sur les surfaces possédant une conique multiple* (Bulletin de la Société des Sciences de Liége, 1943, pp. 340-353).

zionalmente una superficie F_0 di equazioni

$$x_0 x_4 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

$$x_0^n f_0 + x_0^{n-1} f_1 + \dots + x_0^k f_{n-k} + \dots + f_n = 0. \tag{2}$$

La superficie F è la proiezione di F_0 dal punto $O_0(1, 0, 0, 0, 0)$ sul iperpiano $x_0 = 0$.

Il sistema canonico di F è tagliato dalle superficie aggiunte di ordine $2n - 4$ passante $n - 1$ volte per la conica γ. Queste superficie contengono due volte il piano $x_4 = 0$ ed il sistema canonico di F è dunque tagliato delle superficie di ordine $2n - 6$ passante $n - 3$ volte per γ.

Sulla superficie F_0, il sistema canonico è dunque tagliato dalle ipersuperficie di ordine $n - 3$. Dunque, il genere geometrico p_g di F è eguale al numero delle ipersuperficie di ordine $n - 3$ che non contengono come parte l'iperquadrica (1). Abbiamo quindi

$$p_g = \binom{n+1}{4} - \binom{n-1}{4} = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3).$$

Le ipersuperficie di ordine $n - 3$ che segano sopra F il sistema canonico, hanno per equazione, conto tenuto della (1),

$$x_4^{n-3}\psi_0 + x_4^{n-4}\psi_1 + \dots + x_4\psi_{n-4} + \psi_{n-3}$$
$$+ x_0^{n-3}\psi_0' + x_0^{n-4}\psi_1' + \dots + x_0\psi_{n-4}' = 0.$$

dove le ψ, ψ' sono forme algebriche nelle x_1, x_2, x_3 di cui il grado è indicato dall'indice.

Dunque, sulla superficie F, le curve canoniche sono tagliate dalle superficie

$$x_4^{2n-6}\psi_0 + x_4^{2n-7}\psi_1 + \dots + x_4^{n-2}\psi_{n-4} + x_4^{n-3}\psi_{n-3}$$
$$+ \varphi_2^{n-3}\psi_0' + x_4\varphi_2^{n-4}\varphi_1' + \dots + x_4^{n-4}\varphi_2\psi_{n-4}' = 0.$$

Come si vedrà più avanti, possiamo considerare superficie aggiunte per le quali si ha $\psi_0' = 0$, $\psi_1' \equiv 0$, ... Allora il piano $x_4 = 0$ si stacca una o più volte della equazione precedente. Così, ad esempio, la superficie $\psi_{n-3} = 0$ taglia sopra F una curva canonica.

La superficie F è regolare e si ha $p_a = p_g$.

Il genere lineare di F è dato da

$$p^{(1)} = 2n(n-3)^2 + 1.$$

2. - Vogliamo considerare la superficie F nel caso dove questa superficie è mutata in sè dalla omologia di periodo p,

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4, \tag{3}$$

dove ε è una radice primitiva di ordine p della unità. Supporremo che $p = 2\nu + 1$ è primo dispari e che la superficie F non passa per il centro $O_4(0, 0, 0, 1)$ della omologia. La equazione della superficie F contenga un termine in x_4^{2n}.

Nella equazione della superficie F, x_4 non può comparire che con potenze multiple di p e si ha $n = pq$.

Nello spazio S_4, alla omologia (3) corrisponde la omografia

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \varepsilon^{p-1} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4 \tag{4}$$

di cui i punti uniti sono i punti O_0, O_4 e quelli dello spazio a tre dimensioni $x_0 = x_4 = 0$.

La superficie F_0 non passa per i punti O_0, O_4 e la omografia (5) genera sulla superficie una involuzione ciclica I di ordine p e di cui i punti uniti, in numero finito, sono dati da

$$x_0 = 0,\ x_4 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ f_n = 0.$$

Nella equazione (2), x_0 ed x_4 comparono colle potenze p, $2p$, ... e colle combinazione $x_0 x_4$, $(x_0 x_4)^2$, ... Conto tenuto della equazione (1), possiamo scrivere la equazione (2) sotto la forma

$$x_4^{pq} f_0 + x_4^{p(q-1)} f_p + \dots + x_4^{p(q-k)} f_{kp} + \dots + x_4^p f_{(q-1)p} + f_{pq}$$

$$+ x_0^{pq} f_0' + x_0^{p(q-1)} f_p' + \dots + x_0^{p(q-h)} f_{hp}' + \dots + x_0^p f_{(q-1)p}' = 0,$$

dove le f, f' sono adesso forme algebriche nelle x_1, x_2, x_3 di cui il grado è indicato dall'indice.

L'equazione della superficie F è allora

$$x_4^{2pq} f_0 + x_4^{p(2q-1)} f_p + \dots + x_4^{p(2q-k)} f_{kp} + \dots + x_4^{p(q+1)} f_{(q-1)p} + x_4^{pq} f_{pq} +$$

$$+ x_4^{p(q-1)} \varphi_2^p f_{p(q-1)}' + \dots + x_4^{p(q-h)} \varphi_2^{hp} f_{p(q-h)}' + \dots + \varphi_2^{pq} f_0' = 0.$$

3. - Consideriamo, sulla superficie F_0, un punto unito P. Il piano tangente alla superficie in questo punto è il piano PO_0O_4. In questo piano, la omografia (4) dà una omografia non omologica e nel fascio delle tangente in P alla superficie, l'omografia $x_0' : x_4' = \varepsilon^{p-1} x_0 : \varepsilon x_4$.

Il punto P è dunque un punto unito di seconda specie che noi abbiamo chiamato « punto unito simetrico » [2]).

Diciamo Φ una superficie normale imagine della involuzione I sulla quale i punti di diramazione sono isolati. Il punto di diramazione P', corrispondente al punto P, è doppio biplanare per la superficie Φ e si ha una successione di $\nu - 1$ punti doppi biplanari infinitamente vicini al punto P', essendo l'ultimo ordinario. Questi punti non hanno nessuna influenza sul sistema canonico di Φ.

Sulla superficie F, i pq punti uniti della involuzione I sono dati da

$$x_4 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ f_{pq} = 0.$$

In un punto $R(x_1, x_2, x_3)$ della conica γ, i piani tangenti alla superficie F sono dati da

$$(pq)!\, X_4^{pq} f_{pq} + [p(q-1)]!\, X_4^{p(q-1)} \left(X_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} \right) + \dots$$

$$\dots + p!\, X_4^{p} \left(X_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} \right)^{p(q-1)} f_p +$$

$$+ (pq)!\, f'_0 \left(X_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} \right)^{pq} = 0.$$

Se il punto R non è unito, abbiamo q gruppi di p piani distinti che si corrispondono nella omologia (3). Se invece R è unito, abbiamo $f_{pq} = 0$ e fra i gruppi di p piani, uno è formato da p piani coincidenti in un piano passante per O_4. Dunque, se R non è unito, abbiamo q gruppi di p punti distinti infinitamente vicini di R, che sono gruppi della involuzione. I. Se R è unito, abbiamo nell'intorno del primo ordine di R, $q - 1$ gruppi di punti distinti di I ed un punto unito sulla retta RO_4.

4. - Consideriamo da prima il caso $q = 1$. La superficie F ha per equazione

$$x_4^{2p} f_0 + x_4^p f_p + \varphi_2^p f'_0 = 0.$$

La superficie Φ si riduce ad un piano doppio con curva di diramazione

$$f_p^2 - 4 f_0 f'_0 \varphi_2^p = 0,$$

---

[2]) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scient., N. 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Revista de la Universidad de Tucuman, 1940, pp. 283-291).

d'ordine $2p$. I punti di diramazione sono i punti $f_p = \varphi_2 = 0$. Si vede che questi punti sono doppi per la curva di diramazione. Di più, questa ha $\nu - 1$ punti doppi infinitamente vicini ad ognuno punto di diramazione.

Le curve canoniche del piano doppio Φ sono le curve doppie di ordine $p = 3$ e formano un sistema senza punti-basi. Quindi, il genere geometrico di Φ è

$$p'_g = \frac{1}{2}(p-1)(p-2).$$

Φ è regolare e si ha $p'_a = p'_g$.

Il genere lineare di Φ è $\pi^{(1)} = 2(p-3)^2$.

Dobbiamo avere [3])

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - 2p(p^2 - 1),$$
$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

Si vede facilmente che queste relazioni sono delle identità.

Al sistema canonico di Φ corrisponde sulla F un sistema appartenente al sistema canonico di questa superficie. Le curve di questo sistema non passano per i punti uniti di I. Sulla superficie F_0, questo sistema è tagliato dalle ipersuperficie di ordine $p-3$, di equazione

$$(x_0x_4)^{\nu-2}\psi_1(x_1, x_2, x_3) + (x_0x_4)^{\nu-2}\psi_3 + \dots + \psi_{2\nu-3} = 0,$$

dove le ψ sono forme algebriche nelle x_1, x_2, x_3 di cui il grado è indicato dall'indice, con coefficienti variabili.

Tenuto conto della equazione (1), possiamo scrivere $\psi_{2\nu-3}(x_1, x_2, x_3) = 0$ invece della equazione precedente, oppure $x_4^{p-3}\psi_{p-3} = 0$.

Si ritrova così il risultato precedente.

5. - Supponiamo adesso $q > 1$.

Tenuto conto della equazione (1), le curve canoniche della superficie F_0, mutate in sè dalla omografia (4) e non passante per i punti uniti di I, sono tagliate dalle ipersuperficie

$$x_4^{p(q-1)}\psi_{p-3} + x_4^{p(q-2)}\psi_{2p-3} + \dots + x_4^{p}\psi_{p(q-1)-3} + \psi_{pq-3} +$$
$$+ x_0^{p(q-1)}\psi'_{p-3} + x_0^{p(q-2)}\psi'_{2p-3} + \dots + x_0^{p}\psi'_{p(q-1)-3} = 0,$$

---

3) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coincidence appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Soc. Mathématique de France, 1919, pp. 1-16). *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1952, pp. 1-80).

dove le ψ, ψ' sono forme algebriche nelle x_1, x_2, x_3 di grado indicato dall'indice, con coefficienti variabili.

Sulla superficie F, il sistema corrispondente è segato dalle superficie

$$\begin{aligned}(6)\qquad & x^{2p(q-1)}\psi_{p-3} + x_4^{p(2q-3)}\psi_{2p-3} + \ldots + x_4^{pq}\psi_{p(q-1)-3} + x_4^{p(q-1)}\psi_{pq-3} \\ & + \varphi_2^{p(q-1)}\psi'_{p-3} + x_4^p\varphi_2^{p(q-2)}\psi'_{2p-3} + \ldots + x_4^{p(q-2)}\varphi_2^p\psi'_{p(q-1)\ 3} = 0\end{aligned}$$

Queste ultime superficie sono di ordine $p(2q-1)-3$ e passano $p(q-1)$ volte per la conica γ.

Si calcola agevolmente il numero di queste superficie linearmente indipendenti e si trova che i generi aritmetico e geometrico della superficie Φ sono

$$p'_a = p'_g = \frac{1}{2}[9p^2(2q^2+1)q - 9pq^2 + 12q - 6].$$

Fra i generi p_a di F e p_a' di Φ, abbiamo

$$12(p_a+1) = 12p(p'_a+1) - 2pq(p^2-1).$$

Questa relazione è una identità.

Il genere lineare di Φ è

$$\pi^{(1)} = 2q(pq-3)^2 + 1.$$

6. - Per costruire un modello proiettivo della superficie Φ, facciamo così:

Poniamo

$$(7)\qquad \rho X_0 = x_4^p\,;\quad \rho X_{ijk} = x_1^i x_2^j x_3^k,\quad (i+j+k=p).$$

Una forma algebrica $f_{hp}(x_1, x_2, x_3)$ di grado hp è mutata in una forma $F_h(X)$ di grado h nelle X_{ijk}. La forma φ_2^p si muta in una forma del secondo grado $\Phi_2(X)$ nelle X_{ijk}. Allora, della equazione di F, deduciamo la equazione

$$\begin{aligned}(8)\qquad & X_0^{2q}F_0 + X_0^{2q-1}F_1 + \ldots + X_0^{q+1}F_{q-1} + X_0^qF_q + \\ & + X_0^{q-1}\Phi_2F'_{q-1} + \ldots + \Phi_2^qF'_0 = 0.\end{aligned}$$

Consideriamo X_0, X_{ijk} come coordinate dei punti di uno spazio S_r a

$$r = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$$

dimensioni. Nello spazio $X_0 = 0$, il luogo dei punti di coordinate X_{ijk} è una superficie di VERONESE generalizzata Ω_2, di ordine p^2. Nello spazio S_r, questo luogo è uno cono Ω_3' a tre dimensioni.

La superficie Φ è l'intersezione della ipersuperficie (8) col cono Ω_3'. L'ordine di Φ è $2qp^2$.

Se, nelle equazioni di Ω_2, noi poniamo $x_1 = 0$, abbiamo sopra questa superficie una curva razionale di ordine p. A questa curva corrisponde sulla superficie Φ una curva Γ di ordine $2pq$.

Consideriamo adesso l'equazione (6) delle aggiunte a F. Moltiplicando questa equazione per x, abbiamo mediante le (7),

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & X_0^{2q-2}\Psi_1 + X_0^{2q-3}\Psi_2 + \ldots + X_0^{q}\Psi_{q-1} + X_0^{q-1}\Psi_q + \\
& + X_0^{q-2}\Phi_2\Psi'_{q-1} + \ldots + X_0\Phi_2^{q-2}\Psi'_2 + \Phi_2^{q-1}\Psi'_1 = 0,
\end{aligned}
$$

dove le Ψ, Ψ' sono forme nelle X_{ijk} del grado indicato dall'indice.

Il sistema canonico della superficie Φ è segato dalle ipersuperficie (9) fuori della curva Γ contata tre volte (4).

RIASSUNTO

Costruzione della immagine di una involuzione ciclica appartenente ad una superficie di ordine $2n$ con una conica multipla di ordine n.

RÉSUMÉ

Construction de l'image d'une involution cyclique appartenant à une surface d'ordre $2n$ ayant une conique multiple d'ordre n.

(4) Le superficie di ordine $2n$ con una conica multipla di ordine n sono state studiate dal Dr. B. A. ROSINA, sotto il nome di *quadriche generalizzate*, da un altro punto di vista (Annali dell' Università di Ferrara, 1953, pp. 141-149; 1956, pp. 1-10).