Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. IX, 1958 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 1—2

Sur certaines surfaces algébriques contenant des involutions cycliques n'admettant que des points unis de première espèce

Au Professeur HELLMUTH KNESER

Par LUCIEN GODEAUX à Liége

Nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique nous ont conduit à classer les points unis isolés en deux catégories [1]. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p. Considérons un point uni isolé A, simple pour la surface, et soit T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution. Soit C une courbe algébrique tracée sur la surface et passant simplement par A. La courbe C' que T fait correspondre à C passe par A et deux cas peuvent se présenter suivant que la courbe C' touche C en A quelle que soit C, ou bien que la courbe C' ne touche C en A que pour certaines positions particulières de C. Dans le premier cas, A est un point uni de première espèce, dans le second, un point uni de seconde espèce. Si par exemple F est un plan et T une homographie cyclique, le centre d'une homologie est un point uni de première espèce, un point uni d'une homographie non homologique est de seconde espèce. Revenons au cas général: T donne l'identité dans le domaine du premier ordre d'un point uni de première espèce, une homographie (binaire) dans le domaine d'un point uni de second espèce.

L'objet de cette note est d'étudier une involution appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis tous de première espèce. Cela nous conduit à la construction de surfaces dont les sections hyperplanes constituent le système canonique complet. On sait qu'on ne connait qu'un nombre restreint de surfaces possèdant cette propriété.

1. Soit, dans un espace projectif S_4 à quatre dimensions, une surface F d'équations

$$\varphi_1(x_0, x_1) + \psi_1(x_2, x_3, x_4) = 0\,,$$
$$\varphi_2(x_0, x_1) + \psi_2(x_2, x_3, x_4) = 0\,,$$

où φ_1, φ_2 sont des formes binaires de degré p, n'ayant aucune racine commune, et ψ_1, ψ_2 des formes ternaires de degré p, p étant un nombre premier impair.

La surface F a l'ordre p^2, elle est transformée en soi par l'homographie H d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_0 : x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4\,,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Sur F, H engendre une involution I, d'ordre p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, à savoir les points

$$x_0 = x_1 = 0, \quad \psi_1 = 0\,, \quad \psi_2 = 0\,.$$

Soit A un de ces points. Le plan tangent en A à la surface F passe par la droite $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, par conséquent H détermine dans ce plan une homologie ayant cette droite comme axe et le point A comme centre. Le point A est donc un point uni de première espéce de l'involution I et celle-ci possède donc p^2 points unis de première espèce.

Nous commencerons par construire une surface F' image de l'involution I. A cet effet, posons

$$\varrho X_i = x_0^{p-i} x_1^i\,, \quad \varrho Y_{ik} = x_2^i x_3^k x_4^{p-i-k} \tag{1}$$

et considérons les X, Y comme les coordonnées ponctuelles d'un espace linéaire S_r à $r = \frac{1}{2}(p^2 + 5p + 2)$ dimensions. Appelons σ_p l'espace à p dimensions obtenu en posant $Y_{ik} = 0$ et σ_s, où $s = \frac{1}{2}p(p + 3)$, l'espace à s dimensions obtenu en posant $X_i = 0$. Ces deux espaces ne se rencontrent pas. Les $p + 1$ premières des équations (1) représentent une courbe rationnelle normale K, d'ordre p, appartenant à σ_p et les autres équations (1) représentent dans τ_s une surface de Veronese généralisée Φ, d'ordre p^2, représentant les courbes planes d'ordre p d'un plan. Dans S_r, les équations (1) représentent la variété V_4, à quatre dimensions, d'ordre p^3, intersection de la variété V_{s+2}, d'ordre p, projection de K à partir de σ_s et de la variété V_{p+2}, d'ordre p^2, projetant Φ de σ_p.

Si l'on tient compte des équations (1), il correspond aux équations de la surface F celles de deux hyperplans de S_r ayant en commun un espace S_{r-2} coupant V_4 suivant la surface F' image de l'involution I. L'espace S_{r-2} coupe Φ aux p^2 points de diramation de la surface F', mais il ne rencontre pas la courbe K.

2. Reprenons le point uni A de l'involution I et soit A' le point de diramation correspondant sur F'. Dans nos recherches sur les involutions, nous avons démontré que la surface F' possède en A' un point multiple d'ordre p à cône tangent rationnel. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi.

Observons que dans l'espace S_4, l'homographie H engendre une involution I' dont la variété V_4 est une image. Aux droites de S_4 s'appuyant sur les axes $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ de H correspondent dans S_r les droites s'appuyant sur la courbe K et sur la surface Φ. En particulier à celles de ces droites qui passent par A correspondent dans S_r les droites passant par A' et s'appuyant sur K, c'est-à-dire les droites d'un cône rationnel d'ordre p.

Considérons le plan tangent à Φ en A'. Le lieu des espaces à trois dimensions projetant de ce plan la courbe K est le cône tangent à V_4 en A'. L'espace S_{r-2} de F' passe par le point A' et coupe le cône précédent suivant un cône rationnel, d'ordre p, tangent au point A' à la surface F'. Ainsi se trouve vérifiée la propriété énoncée.

3. Soient p_a le genre arithmétique de F et $p^{(1)}$ son genre linéaire, p_a' le genre arithmétique de F' et π son genre linéaire. Entre ces nombres, nous avons établi que l'on a les relations

$$\begin{aligned} 12\,(p_a + 1) &= 12p(p_a' + 1) + (p-1)(p-5)\,\alpha\,, \\ p^{(1)} - 1 &= p(\pi - 1) + (p-2)^2\,\alpha\,, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\alpha = p^2$ est le nombre des points unis de première espèce sur F.

Pour pouvoir calculer p_a' et π, nous devons donc déterminer p_a et $p^{(1)}$. La surface F étant régulière, nous devons donc déterminer son système canonique.

Une section hyperplane de F est une courbe d'ordre p^2 intersection complète de deux surfaces d'ordre p. Elle est donc de genre $(p-1)(p^2-p-1)$. La série canonique de cette courbe est d'ordre $2p^2(p-2)$ et elle est comme on sait découpée par les surfaces d'ordre $2(p-2)$. Il en résulte que le système adjoint au système des sections planes de F est découpé sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $2(p-2)$. Par conséquent, le système canonique de F est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2p-5$ et comme F est l'intersection complète de deux hypersurfaces, ce système est complet.

Le genre linéaire de la surface s'en déduit immédiatement. L'intersection de F et de deux hypersurfaces d'ordre $2p-5$ est formée de $p^2(2p-5)^2$ points et on a donc

$$p^{(1)} = p^2(2p-5)^2 + 1 .$$

De la formule rappelée plus haut, on en déduit

$$\pi = p(p-3)(3p-7) + 1 .$$

4. La surface F étant régulière, son genre arithmétique p_a est égal à son genre géométrique p_g, c'est-à-dire au nombre d'hypersurfaces d'ordre $2p-5$, linéairement indépendantes, qui ne passent pas par F.

Considérons en premier lieu le cas $p = 3$. Le système canonique de F coincide avec celui de ses sections hyperplanes et on a $p_a = 5$. On en déduit $p_a' = 2$. Comme on a d'autre part $\pi = 1$, le système canonique de la surface F' est un faisceau de courbes elliptiques.

Supposons maintenant $p \geqq 5$ et observons que les équations de la surface F permettent d'obtenir les expressions de x_0^p, x_1^p. Pour qu'une hypersurface d'ordre $2p-5$ ne contienne pas F; il suffit que son équation ne contienne pas de termes où x_0, x_1 interviennent à une puissance supérieure à $p-1$. On a ainsi l'équation

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{p-i} x_0^{p-i-k}\, x_1^k\, \chi_i + \sum_{i=1}^{p-4}\sum_{k=0}^{p-i-1} x_0^{p-i-k-1}\, x_1^k\, \theta_i = 0 ,$$

où χ_i, θ_i sont des formes algébriques à coefficients variables en x_2, x_3, x_4, la première de degré $p-5+i$, la seconde de degré $p-i-4$.

Un calcul simple montre que l'on a

$$p_a = \frac{1}{12}\, p^2(7p^2 - 30p + 35) - 1 .$$

On en déduit

$$p_a' = \frac{1}{2}\, p(p^2 - 4p + 5) - 1 .$$

5. Nous allons maintenant construire un modèle canonique de F' en supposant $p \geqq 5$. Pour plus de clarté, nous commencerons par supposer $p = 5$. Nous avons alors $p_a' = 24$ et $\pi = 81$.

En un point de diramation de F', cette surface a un point quintuple à cône tangent rationnel. Un point de cette nature est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré virtuel -5. Cette courbe est rencontrée en trois points par les courbes canoniques de F'. Par conséquent, à ces dernières courbes correspondent sur F des courbes transformées en elles-mêmes pat H et passant trois fois par les 25 points unis de l'involution. Ces courbes sont découpées sur F par les hypersurfaces

$$\sum_{i=0}^{3} x_0^{3-i} x_1^i \alpha_i(x_2, x_3, x_4) = 0\,, \tag{1}$$

où les α_i sont des formes quadratiques à coefficients variables.

Posons

$$\varrho X_{ik} = x_0^3 x_i x_k\,, \quad \varrho Y_{ik} = x_0^2 x_1 x_i x_k\,, \quad \varrho Z_{ik} = x_0 x_1^2 x_i x_k\,, \quad \varrho U_{ik} = x_1^3 x_i x_k\,, \tag{2}$$

et considérons ces 24 quantités comme les coordonnées ponctuelles d'un espace linéaire S_{23} à 23 dimensions.

De ces équations, on déduit

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{matrix} X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{matrix} \right\| = 0\,, \qquad \left\| \begin{matrix} Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{23} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{24} & Y_{34} & Y_{44} \end{matrix} \right\| = 0\,, \\ &\left\| \begin{matrix} Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{23} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{24} & Z_{34} & Z_{44} \end{matrix} \right\| = 0\,, \qquad \left\| \begin{matrix} U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{23} & U_{33} & U_{34} \\ U_{23} & U_{34} & U_{44} \end{matrix} \right\| = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

(tous les mineurs de ces déterminants étant nuls) c'est-à-dire les équations de quatre surfaces de Veronese M_1, M_2, M_3, M_4 respectivement situées dans des espaces linéaires à cinq dimensions $\Sigma_1(Y = Z = U = 0)$, $\Sigma_2(X = Z = U = 0)$, $\Sigma_3(X = Y = U = 0)$, $\Sigma_4\,(X = Y = Z = 0)$, ne se rencontrant pas deux à deux. Dans l'espace S_{23}, les équations (3) représentent quatre variétés à 20 dimensions, d'ordre quatre, W_1, W_2, W_3, W_4. La variété W_1 par exemple, est obtenue en projetant M_1 de l'espace à 17 dimensions déterminé par $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$.

Des équations (2), on déduit également six systèmes d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{ik} & Y_{ik} & Z_{ik} \\ Y_{ik} & Z_{ik} & U_{ik} \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (i, k = 2, 3, 4)\,. \tag{4}$$

Ces équations représentent une cubique gauche N_{ik} située dans un espace à trois dimensions σ_{ik}. On obtient ainsi six cubiques gauches et chacune de ces cubiques rencontre en un point chacune des surfaces M_1, M_2, M_3, M_4.

Dans S_{23}, les équations (2) représentent une variété W'_{ik} à 21 dimensions obtenue en projetant la cubique N_{ik} de l'espace de dimension minimum 19 contenant les autres cubiques gauches.

Observons maintenant que les hypersurfaces (1) sont des réglées passant trois fois par le plan $R(x_0 = x_1 = 0)$ et deux fois par la droite $r(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$. Deux de ces hypersurfaces ont en commun, en dehors du plan R, une surface réglée d'ordre

16 passant quatre fois par la droite r. Un hyperplan passant par R contient quatre génératrices de la réglée, donc celle-ci rencontre le plan R suivant une courbe d'ordre 12. Il en résulte qu'une troisième hypersurface (1) coupe la surface précédente en 36 droites s'appuyant sur r et R.

A une droite s'appuyant sur r et R (unie pour H) correspond un point de S_{23} et à l'ensemble de ces droites correspond une variété à trois dimensions Ω_3, d'ordre 36, rationnelle, intersection des variétés W_1, W_2, W_3, W_4, W'_{ik}.

Les groupes de l'involution I appartenant à F sont situés sur des droites s'appuyant sur r et R. La surface d'ordre 16 commune à deux hypersurfaces (1) coupe F en 400 points formant 80 groupes de I. Aux ∞^2 droites contenant les groupes de I correspondent sur Ω_3 les points de la surface F', qui est donc bien d'ordre $\pi - 1 = 80$. Les sections hyperplanes de F' forment le système canonique complet de cette surface.

On peut d'ailleurs écrire les équations d'hypersurfaces passant par F' (et coupant encore Ω_3 suivant d'autres surfaces). Une de ces hypersurfaces est par exemple

$$\varphi_1(X_{22}, Y_{22})\,\psi_2(X_{22}, X_{23}, X_{24}) - \varphi_2(X_{22}, Y_{22})\,\psi_1(X_{22}, X_{23}, X_{24}) = 0\,.$$

6. Passons maintenant au cas où le nombre premier p est supérieur à cinq.

Aux p^2 points unis de l'involution I correspondent sur la surface F' des points multiples d'ordre p à cônes tangents rationnels. Chacun de ces points est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel $-p$. Une telle courbe est rencontrée en $p-2$ points par les courbes canoniques de F'. Les courbes canoniques de F qui correspondent aux courbes canoniques de F' sont découpées sur F par les hypersurfaces d'ordre $2p-5$, passant $p-2$ fois par les points unis et transformées en elles-mêmes par H. Ces hypersurfaces doivent donc passer $p-2$ fois par le plan $x_0 = x_1 = 0$ et ont une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{p-2} x_0^{p-2-i}\, x_1^i\, \alpha_i(x_2, x_3, x_4) = 0\,, \tag{1}$$

où les α_i sont des formes de degré $p-3$ à coefficients variables. Il faut cependant défalquer de ces hypersurfaces celles qui contiendraient éventuellement F.

Le nombre des coefficients figurant dans l'équation précédente est précisément $\frac{1}{2}(p-1)^2(p-2) = p'_a$, donc aucune des hypersurfaces (1) ne passe par F.

Cela étant, rapportons projectivement les hypersurfaces (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_ϱ à $\varrho = p'_a - 1$ dimensions. A la surface F correspondra un modèle canonique F'_0 de F'.

A une hypersurface (1) correspond un hyperplan de S_ϱ. En d'autres termes, les coordonnées de S_ϱ sont proportionnelles aux termes en $x_0, x_1, \ldots, x_4$ de (1). Considérons les coordonnées proportionnelles aux différents termes de $x_0^{p-2-i} x_1^i \cdot \alpha_i(x_2, x_3, x_4)$ et annulons toutes les autres. Nous obtenons dans un espace linéaire Σ_i, de dimension $\frac{1}{2}p(p-3)$, une surface de Veronese généralisée M_i, d'ordre $(p-3)^2$, représentant les courbes d'ordre $p-3$ du plan.

En faisant varier i de 0 à $p-2$, nous obtenons ainsi $p-1$ espaces $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-2}$, ne se rencontrant pas deux à deux, contenant respectivement des surfaces

$M_0, M_1, \dots, M_{p-2}$. Nous désignerons par W_i la variété à $\frac{1}{2}p(p^2-5p+8)$ dimensions projetant la surface M_i de l'espace de dimension minimum contenant

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{i-1}, \quad \Sigma_{i+1}, \dots, \Sigma_{p-2}.$$

Considérons maintenant un terme déterminé $x_2^j\, x_3^k\, x_4^{p-3-j-k}$ dans α_i et annulons toutes les coordonnées de S_φ qui ne contiennent pas des termes de cette nature. Nous obtenons ainsi dans S_φ une courbe rationnelle normale N_{jk} d'ordre $p-2$, située: dans un espace linéaire σ_{jk} à $p-2$ dimensions. Cet espace s'appuie en un point sur chacun des espaces $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{p-2}$ et la courbe N_{jk} rencontre en ce point d'appui chacune des surfaces $M_0, M_1, \dots, M_{p-2}$. En faisant varier j et k, nous obtenons $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ espaces σ_{jk} et dans chacun de ces espaces une courbe N. Nous désignerons par W'_{jk} la variété à $\frac{1}{2}(p-2)(p^2-2p-1)$ dimensions projetant N_{jk} de l'espace de dimension minimum contenant les espaces σ distincts de σ_{jk}.

Aux droites de S_4 s'appuyant sur r et R correspondent actuellement les points d'une variété Ω_3, commune aux variété W et W', car les hypersurfaces (1) sont des réglées formées par ces droites. Les hypersurfaces réglées (1) passent $p-2$ fois par R et $p-3$ fois par r. Deux de ces hypersurfaces ont en commun une surface réglée d'ordre $(p-3)(3p-7)$ pour laquelle r est multiple d'ordre $(p-3)^2$ et qui rencontre R suivant une courbe d'ordre $2(p-3)(p-2)$. Trois hypersurfaces (1) ont en commun $3(p-3)^2(p-2)$ droites s'appuyant sur r et R. Ce nombre est donc l'ordre de la variété Ω_3. Deux hypersurfaces (1) rencontrent la surface F en $p^2(p-3)\cdot$ $\cdot(3p-7)$ points formant $p(p-3)(3p-7)$ groupes de l'involution I. On en conclut que la surface F'_0 tracée sur Ω_3 est d'ordre $\pi - 1 = p(p-3)(3p-7)$. Ses sections hyperplanes forment le système canonique complet.

Bibliographie

[1] L. Godeaux, Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Actual. sci. industr. N° 270 (1935). Mémoire sur les surfaces multiples. Mém. Acad. roy. Belgique **27**, (1952). Note sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Arch. Math. **6**, 1–4 (1955).

[2] L. Godeaux, Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coincidence appartenant à une surface algébrique. Bull. Soc. math. France **17**, 1–16 (1919).

Eingegangen am 2. 10. 1957