Publications Scientifiques de l'Université d'Alger,
Série A, Vol. I, fasc. 2. 1954.

Lucien GODEAUX (Liège).

STRUCTURE DES POINTS DE DIRAMATION DES SURFACES MULTIPLES

Dans des travaux récents [1], nous avons résolu le problème suivant : Considérons, sur une surface algébrique F, une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et soit Φ une surface normale, image de cette involution, sur laquelle les points de diramation soient isolés. Nous avons montré comment on pouvait construire une telle surface. Les points de diramation de la surface Φ sont singuliers pour celle-ci et il s'agit de déterminer ces singularités. D'une manière précise, il s'agit de déterminer l'ensemble des courbes équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un point de diramation. C'est ce que nous appelons déterminer la structure du point de diramation.

Le résultat que nous avons établi peut se résumer de la manière suivante : En un point de diramation, la surface Φ possède un point multiple d'ordre p à cône tangent rationnel irréductible, ou un point de multiplicité inférieure à p en lequel le cône tangent se décompose en deux, trois ou quatre cônes rationnels. Nous indiquerons plus loin (nº 4) l'ensemble des courbes rationnelles qui forment la structure du point de diramation dans le dernier cas, le plus intéressant.

---

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8º de l'Académie royale de Belgique, 1952, pp. 1-80); *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1953, pp. 1009-1019, 1083-1089; 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., Nº 270, Paris, Hermann, 1935).

Partant de ce résultat, nous indiquerons les relations qui existent entre les différents nombres que nous sommes conduit à introduire et nous montrons comment, dans un cas déterminé, on peut étudier un point de diramation. Nous en faisons une application au cas où le cône tangent à la surface Φ se réduit à quatre plans et possède, dans son domaine du premier ordre, deux points doubles biplanaires.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre premier $p > 2$, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Nous désignerons par Φ une surface image de cette involution; nous supposerons Φ normale et telle que les points de diramation soient isolés. Nous avons montré, dans nos travaux cités, comment on pouvait construire une surface Φ répondant à ces conditions.

Considérons un point uni A de I. Deux cas peuvent se présenter suivant que l'involution détermine, dans le domaine du premier ordre de A, l'identité ou une homographie ne présentant que deux points unis. Dans le premier cas, nous dirons que le point A est uni de première espèce, dans le second qu'il est uni de seconde espèce. Nous supposerons ici que le point A est uni de seconde espèce et que ce point est simple pour la surface F.

Dans le faisceau des tangentes à F en A, l'involution détermine une homographie que l'on peut représenter par

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \varepsilon^{\alpha-1}\mu,$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Si nous posons $\eta = \varepsilon^{\alpha}$, il existe un entier β tel que $\eta^{\beta-1} = 1$ et l'homographie précédente peut aussi être représentée par

$$\lambda' : \mu' = \eta^{\beta-1}\lambda : \mu.$$

Au point uni A sont donc attachés deux nombres α, β, compris entre 1 et p. On a d'ailleurs

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Nous désignerons par t_α, t_β les deux directions unies issues de A et représentées respectivement par $\mu = 0$, $\lambda = 0$.

2. Désignons par $|\Gamma_0|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par C_0 les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ_0. Nous avons démontré que l'on peut toujours s'arranger de telle sorte que $|C_0|$ appartienne à un système complet $|C|$, contenant p systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$, appartenant à l'involution I, le

premier étant dépourvu de points-base et les autres ayant comme points-base les points unis de l'involution I.

Parmi les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$, il en existe deux, que nous désignerons par $|C_\alpha|$, $|C_\beta|$ dont les courbes passent simplement par le point A. Les courbes C_α touchent en A la direction t_α et ont en commun une suite de $\alpha - 1$ points fixes, infiniment voisins successifs de A. Nous désignerons ces points par

$$(\alpha, 1), \quad (\alpha, 2), \quad \ldots, \quad (\alpha, \alpha - 1).$$

Ils sont unis pour l'involution, les $\alpha - 2$ premiers de seconde espèce, le dernier de première espèce en ce sens que dans le domaine du premier ordre de $(\alpha, \alpha - 1)$, l'involution détermine l'identité.

De même, les courbes C_β passent par $\beta - 1$ points

$$(\beta, 1), \quad (\beta, 2), \quad \ldots, \quad (\beta, \beta - 1)$$

points fixes, infiniment voisins successifs de A, les $\beta - 2$ premiers étant unis de seconde espèce, le dernier uni de première espèce.

Considérons par exemple le point (α, i), où $i < \alpha - 1$. Dans le domaine du premier ordre de ce point, l'involution détermine une homographie d'ordre p présentant deux points unis : le point $(\alpha, i + 1)$ et un point que nous désignerons par $(\alpha, i, 1)$. Ce dernier point peut être uni de première ou de seconde espèce. Dans ce dernier cas, il possède dans son domaine du premier ordre deux points unis que nous désignerons par $(\alpha, i, 2)$ et par $(\alpha, i, 1, 1)$. Et ainsi de suite.

On voit que le point A est le pied d'une sorte d'arbre dont les nœuds sont les points unis de l'involution I situés dans les domaines des différents ordres du point A. Il y a d'abord deux branches principales $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$. Des nœuds de ces branches partent des rameaux tels que $(\alpha, i, 1)$, $(\alpha, i, 2)$, $(\alpha, i, 2, 1)$, ... par exemple. Les cheminements que nous aurons à considérer sur cet arbre aboutissent à un dernier point uni de première espèce, mais il peut exister des cheminements ne satisfaisant pas à cette condition ([1]).

Nous désignerons par Γ_α, Γ_β les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_α, C_β respectivement.

3. Le système $|C_0|$, transformé sur F du système des sections hyperplanes $|\Gamma_0|$ de Φ, est dépourvu de points-base. Appelons C_0' les courbes C_0 passant par A. Les courbes C_0' ont en A une certaine multiplicité $\lambda_1 + \mu_1 < p$, avec μ_1 tangentes confondues avec t_α et λ_1 avec t_β.

([1]) *Osservazioni sui punti uniti delle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 1950, pp. 70-73).

Appelons C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une tangente à F distincte t_α, t_β. Les courbes C_0'' ont en A une certaine multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$ avec μ_2 tangentes confondues avec t_α et λ_2 avec t_β.

Nous pouvons de même définir les systèmes linéaires $|C_0'''|$, $|C_0^{(4)}|$, ... de courbes, les courbes de ces systèmes ayant en A des multiplicité inférieures à p, jusqu'au moment où l'on arrivera à un système dont les courbes auront en A la multiplicité p et des tangentes variables. Si l'on pose $p = 2\nu + 1$, ce dernier sustème est $C_0^{(\nu+1)}$.

Désignons par $\lambda_i + \mu_i < p$ la multiplicité en A des courbes $C_0^{(i)}$, μ_i tangentes étant confondues avec t_α et λ_i avec t_β. Les nombres λ_i, μ_i doivent satisfaire aux congruences

$$\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0, \qquad \mu_i + \beta\lambda_i \equiv 0 \qquad (\text{mod. p.})$$

En particulier, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_\alpha p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_\beta p,$$

h_α et h_β étant des entiers positifs.

Nous dirons que le point A est de première, seconde ou troisième catégorie suivant que $h_\alpha = h_\beta = 1$, qu'un seul des nombres h_α, h_β est égal à l'unité ou que tous deux sont supérieurs à l'unité. L'étude des points de troisième catégorie comprend comme cas particuliers celles des points des deux premières catégories. Nous supposerons dans la suite $h_\alpha > 1$, $h_\beta > 1$.

4. L'étude des singularités au point A des courbes C_0', C_0'', ... permet de déterminer la singularité du point de diramation A' homologue de A sur Φ.

Posons

$$p = a_1\alpha + b_1, \qquad (b_1 < \alpha),$$
$$p = b_2\beta + a_2, \qquad (a_2 < \beta),$$

puis définissons deux entiers m_1, m_2 par les inégalités

$$(h_\alpha - 1)b_1 < m_1\alpha < h_\alpha b_1,$$
$$(h_\beta - 1)a_2 < m_2\beta < h_\beta a_2.$$

Le point A' est multiple d'ordre $a_1 = m_1 + m_2 + b_2$ pour la surface Φ et le cône tangent à cette surface en ce point se décompose en quatre cônes rationnels respectivement d'ordres a_1, m_1, m_2, b_2.

Pour mieux définir la singularité du point A' pour la surface Φ, projetons cette surface du point A' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons ainsi une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0'.

Sur chacune des courbes C_0', le point A est l'origine d'un certain nombre de branches linéaires et d'un certain nombre de branches superlinéaires. Nous avons démontré que le point $(\alpha, \alpha - 1)$ est multiple d'ordre a_1 et le point $(\beta, \beta - 1)$ multiple d'ordre b_2 pour les courbes C_0'. De plus il, existe des branches superlinéaires d'origine A, passant par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, θ_α), puis par des points $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, ... infiniment voisins successifs de (α, θ_α) ; le dernier point de cette suite appartenant à toutes les courbes C_0', sera désigné par P_α et est multiple d'ordre m_1 pour les courbes C_0'. On définit de même un point P_β, multiple d'ordre m_2 pour les courbes C_0'. Les points P_α, P_β sont unis de première espèce pour l'involution I.

Ceci rappelé, aux domaines des points $(\alpha, \alpha - 1)$, P_α, P_β, $(\beta, \beta - 1)$ correspondent sur Φ_1, des courbes rationnelles σ_α, τ_α, τ_β, σ_β, dont les ordres sont respectivement a_1, m_1, m_2, b_2. Et les cônes tangents à Φ en A' s'obtiennent en projetant ces courbes de ce point.

La considération des systèmes $|C_0''|$, $|C_0'''|$, ... permet de montrer que les courbes τ_α, τ_β se coupent en un point A_1', les courbes σ_α, τ_α en un point A_{11}', les courbes τ_β, σ_β en un point A_{12}', sans qu'il y ait d'autre point commun à deux des courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β.

Les points A_1', A_{11}', A_{12}' peuvent être simples ou doubles pour la surface Φ_1. Nous supposerons que :

Le point A_1 est équivalent à t courbes rationnelles ρ_1, ρ_2, ..., ρ_t de degré virtuel -2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point mais ne rencontrant pas les autres. De plus, ρ_1 rencontre τ_α en un point et ρ_t rencontre τ_β en un point.

Le point A_{11}' est équivalent à u_1 courbes rationnelles ω_1', ω_2', ..., ω_{u_1}' de degré virtuel -2, présentant la même particularité que les courbes ρ. La courbe ω_1' coupe σ_α en un point et la courbe ω_{u_1}' coupe τ_α en un point.

Le point A_{12}' est équivalent à u_2 courbes ω_1'', ω_2'', ..., ω_{u_2}'', de degré virtuel -2, présentant également la même particularité que les courbes ρ, ω'. La courbe ω_1'' coupe τ_β en un point et la courbe ω_{u_2}'' coupe σ_β en un point également.

On a la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \Sigma\omega_i' + \tau_\alpha + \Sigma\rho_i + \tau_\beta + \Sigma\omega_i'' + \sigma_\beta,$$

ce qui permet de voir que les courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β ont respectivement les degrés virtuels

$$-(a_1 + 1), \qquad -(m_1 + 2), \qquad -(m_2 + 2), \qquad -(b_2 + 1).$$

5. Les courbes Γ_α rencontrent la courbe σ_α en un point, mais ne rencontrent pas les autres courbes de Φ dont l'ensemble constitue la structure du point A'. Il existe une relation fonctionnelle entre les courbes Γ_α et Γ_0.

A une courbe C de F correspond sur Φ une courbe Γ qui est en même temps l'homologue des courbes de $|C|$ conjuguées dans l'involution de la courbe considérée. Lorsque C varie d'une manière continue sur F et tend vers une courbe C_0, la courbe Γ varie d'une manière continue sur Φ et se réduit à une courbe Γ_0 comptée p fois. Si au contraire on fait tendre C vers une courbe C_α, la courbe Γ se réduit à une courbe Γ_α comptée p fois, augmentée des composantes des points de diramation On a donc

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_\alpha + \xi_1\sigma_\alpha + \Sigma\eta'_i\omega'_i + \xi_2\tau_\alpha + \Sigma\eta_i\rho_i + \xi_3\tau_\beta + \Sigma\eta''_i\omega''_i + \xi_4\sigma_\beta + \Delta,$$

Δ étant un terme qui provient de l'existence des autres points de diramation de la surface Φ. (Notons qu'il y a au moins deux points de diramation).

Les ξ, η, η', η'' sont des entiers que l'on détermine en prenant les intersections de la courbe précédente avec σ_α, ω'_1, ..., σ_β. On trouve ainsi la valeur du nombre p.

Posons

$$U_1 = m_1(u_1 + 1) + 1, \qquad U_2 = m_2(u_2 + 1) + 1;$$

nous avons [1]

$$\begin{aligned} p = & \left[(t+1)U_1U_2 + (u_2+1)U_1 + (u_1+1)U_2\right]a_1b_2 \\ & + \left[(t+1)m_2U_1 + U_1 + m_2(u_1+1)\right]a_1 \\ & + \left[(t+1)m_1U_2 + U_2 + m_1(u_2+1)\right]b_2 \\ & + (t+1)m_1m_2 + m_1 + m_2. \end{aligned}$$

La considération des courbes Γ_β conduit au même résultat.

Ecrivons la valeur de p sous la forme

$$p = Aa_1b_2 + Ba_1 + Cb_2 + D;$$

nous avons

$$\alpha = Ab_2 + B, \qquad b_1 = Cb_2 + D,$$
$$\beta = Aa_1 + C, \qquad a_2 = Ba_1 + D.$$

On vérifie que

$$\alpha\beta - 1 = Ap.$$

---

(1) *Sur l'ordre d'une involution cuclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège, 1953, pp. 77-84).

D'autre part, m_1 est déterminé par la double inégalité

$$(h_\alpha - 1)\, b_1 < m_1\alpha < h_\alpha b_1;$$

on en déduit

$$h_\alpha = m_1(u_1 + 1) + 1 = U_1,$$

et de même

$$h_\beta = m_2(u_2 + 1) + 1 = U_2.$$

On a par conséquent

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = U_1 p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = U_2 p,$$

et l'on en déduit

$$\lambda_1 = U_2 b_2 + m_2, \qquad \mu_2 = U_1 a_1 + m_1.$$

6. Nous sommes maintenant en mesure de donner, avec ces notations, le comportement des courbes C'_0 au point A.

Observons que si la surface Φ est d'ordre n, les courbes Γ_α, Γ_β sont d'ordre n également. Ces courbes passent simplement par le point A′, donc rencontrent les courbes Γ'_0, en dehors de ce point, en $n - 1$ points. Il en résulte que les courbes C_α, C_β rencontrent les courbes C'_0 en p points confondus en A (et il en est de même pour les courbes C''_0, C'''_0, ...).

Les courbes C_α passent simplement par les points

$$(\alpha, 1), \qquad (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1),$$

donc la somme des multiplicités de A et de ces points pour les courbes C'_0 est égale à p. De même, les courbes C_β passent simplement par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$ et la somme des multiplicités des courbes C'_0 en A et en ces points est égale à p.

Si nous posons

$$(t + 1)\lambda_1 + b_2(u_2 + 1) = \theta_\alpha[a_1(u_1 + 1) + 1] + \eta_1,$$
$$(t + 1)\mu_1 + a_1(u_1 + 1) = \theta_\beta[b_2(u_2 + 1) + 1] + \eta_2,$$

on voit que les courbes C_1 passent :

$\lambda_1 + \mu_1$ fois par A,

μ_1 fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta_\alpha - 1)$,

$a_1 + m_1(\eta_1 + 1)$ fois par le point (α, θ_α),

a_1 fois par les points $(\alpha, \theta_\alpha + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$,

un certain nombre de fois par les points $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, ... et m_1 fois par le point P_α,

λ_1 fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \theta_\beta - 1)$,

$b_2 + m_2(\eta_2 + 1)$ fois par le point (β, θ_β),

b_2 fois par les points $(\beta, \theta_\beta + 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, un certain nombre de fois par les points $(\beta, \theta_\beta, 1)$, ... et m_2 fois par le point P_β.

Le point A absorbe $n(a_1 + m_1 + m_2 + b_2)$ points d'intersection de deux courbes C'_0.

7. Parmi les systèmes $|C'_0|$, $|C''_0|$, ... se trouvent des systèmes que nous désignerons par $|\overline{C'_0}|$, $|\overline{C''_0}|$, ... Pour le système $|\overline{C_0^{(i)}}|$, on a

$$\lambda'_i = (ti + i - t)\lambda_1 + (i - 1)M_2,$$
$$\mu'_i = \mu_1 - (i - 1)M_1,$$

où l'on a posé

$$M_1 = a_1(u_1 + 1) + 1, \qquad M_2 = b_2(u_2 + 1) + 1.$$

Pour $i = 1$, on a $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\mu'_1 = \mu_1$ et les systèmes $|C'_0|$, $|\overline{C'_0}|$ coïncident.

Observons que l'on peut écrire

$$p = (t + 1)\lambda_1\mu_1 + M_1\lambda_1 + M_2\mu_1.$$

Les courbes $C_0^{\prime(i)}$ passent $\lambda'_i + \mu'_i$ fois par A, μ'_i fois par

$$(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_\alpha - 1) \qquad a_1 + (m_1 - i + l)(r_1 + 1)$$

fois par (a, θ_α), a_1 fois par $(\alpha, \theta_\alpha + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, un certain nombre de fois par $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, ... et $m_1 - i + 1$ fois par le point P_α.

On a également certains systèmes que nous désignerons par $|\overline{\overline{C'_0}}|$, $|\overline{\overline{C''_0}}|$, ... Le système $|\overline{\overline{C_0^{(i)}}}|$ est donné par

$$\lambda''_i = \lambda_1 - (i - 1)M_2, \qquad \mu''_i = (ti + i - t)\mu_1 + (i - 1)M_1.$$

Les courbes $\overline{\overline{C_0^{(i)}}}$ passent $\lambda''_i + \mu''_i$ fois par A, λ''_i par les points $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \theta_\beta - 1)$, $b_2 + (m_2 - i + 1)(r_2 + 1)$ fois par (β, θ_β), b_2 fois par $(\beta, \theta_\beta + 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, un certain nombre de fois par les points $(\beta, \theta_\beta, 1)$, ... et $m_2 - i + 1$ fois par P_β.

Les systèmes $|C'_0|$ et $|\overline{\overline{C'_0}}|$ coïncidents, mais les systèmes $|\overline{C''_0}|$ et $|\overline{\overline{C''_0}}|$ ne peuvent coïncider, car alors on aurait

$$(t + 1)\lambda_1 + 2M_2 = 0, \qquad (t + 1)\mu_1 + 2M_1 = 0,$$

ce qui est absurde.

Supposons que dans la suite des systèmes $|C'_0|$, $|C''_0|$, ..., on rencontre le système $|\overline{C''_0}|$ avant $|\overline{\overline{C''_0}}|$. On doit avoir

$$\lambda' + \mu'_2 < \lambda''_2 + \mu''_2,$$

c'est-à-dire

$$(t + 1)\lambda_1 + 2M_2 < (t + 1)\mu_1 + 2M_1.$$

Nous avons observé que le système $|\overline{C_0''}|$ ne coïncide avec le système $|C_0''|$ que si l'on a $t = 0$ [1].

8. Nous allons traiter un exemple, où le point A′ est quadruple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en quatre plans. Nous supposerons précisément

$$a_1 = b_2 = m_1 = m_2 = 1, \qquad t = 0.$$

Nous avons alors

$$p = 3u_1u_2 + 8(u_1 + u_2) + 21,$$
$$\alpha = 3u_1u_2 + 8u_1 + 5u_2 + 19, \quad \beta = 3u_1u_2 + 5u_1 + 8u_2 + 19,$$
$$\lambda_1 = u_2 + 3, \quad \mu_1 = u_1 + 3; \qquad \lambda'_2 = 3(u_2 + 3) - 1, \quad \mu'_2 = 1;$$
$$\lambda''_2 = 1, \quad \mu''_2 = 3(u_1 + 3) - 1;$$
$$2(u_2 + 2) = \theta_\alpha(u_1 + 2) + \cdots, \qquad 2(u_1 + 2) = \theta_\beta(u_2 + 2) + \cdots.$$

Nous supposerons que le système $|\overline{C_0''}|$ précède le système $|\overline{\overline{C_0''}}|$, c'est-à-dire que l'on a $u_2 < u_1$.

Pour fixer les idées, nous supposerons $u_1 = 3$, $u_2 = 2$. On a alors

$$p = 79, \quad \alpha = 65, \quad \beta = 62, \quad \theta_\alpha = 1, \quad \theta_\beta = 2, \quad \lambda_1 = 5,$$
$$\mu_1 = 6, \quad \lambda'_2 = 14, \quad \mu' = 1, \quad \lambda''_2 = 1, \quad \mu''_2 = 17.$$

Sur la surface Φ_1, nous avons quatre droites σ_α, τ_α, τ_β, σ_β. Le point de rencontre A'_1 de τ_α, τ_β est simple pour la surface, celui A'_{11} de σ_α, τ_α est double biplanaire et possède un point double conique dans son domaine du premier ordre, celui A'_{12} de τ_β, σ_β est double biplanaire ordinaire.

Nous avons, sur Φ,

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_\alpha + \omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3 + \tau_\alpha + \tau_\beta + \omega''_1 + \omega''_2 + \sigma_\beta.$$

Les droites σ_α, σ_β ont donc le degré virtuel -2 et les droites τ_α, τ_β le degré virtuel -3.

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité 11 et passent
cinq fois par le point $(\alpha, 1)$,
une fois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 64)$,
une fois par les points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$,
cinq fois par le point $(\beta, 1)$,
quatre fois par le point $(\beta, 2)$,
une fois par les points $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 61)$,
une fois par les points $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$, $(\beta, 2, 1, 2)$.

[1] *Recherches sur les points...* (*loc. cit.*), troisième note.

On vérifie que le points A absorbe 4.79 des point d'intersection de deux courbes C'_0.

Les droites σ_α, τ_α, τ_β, σ_β correspondent respectivement aux domaines des points $(\alpha, 64)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 61)$.

9. Dans les conditions où nous nous sommes placés, le système $|C''_0|$ coïncide avec $|\overline{C''_0}|$ et on a $\lambda_2 = 14$, $\mu_2 = 1$. Les courbes C''_0 passent 15 fois par A et une fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 64)$.

Les courbes Γ''_0 qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point de τ_α, puisque les courbes C''_0 ne passent plus par le point $P_\alpha \equiv (\alpha, 1, 1, 3)$.

Observons que les courbes $\overline{C''_0}$, dont le système suit $|C''_0|$ passent une fois par $(\beta, 61)$, donc les courbes C''_0 passent également par ce point. Il en résulte qu'elles ne peuvent plus passer par $P_\beta \equiv (\beta, 2, 1, 2)$ et que les courbes Γ''_0 sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A'_1 commun aux droites τ_α, τ_β.

Supposons que les courbes C''_0 passent 14 fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, x)$ y fois par le point $(\beta, x+1)$, une fois par les points $(\beta, x+2), \ldots, (\beta, 61)$. On doit avoir

$$15 + 14x + y + 60 - x = 79,$$

c'est-à-dire

$$13x + y = 4,$$

d'où $x = 0$, $y = 4$. Les courbes C''_0 passent donc quatre fois par $(\beta, 1)$, une fois par les points $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 61)$, trois fois par les points $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, et une fois par les points $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, $(\beta, 1, 4, 2)$.

Appelons Φ_2 la surface projection de Φ_1 sur un hyperplan à partir de A'_1. Sur Φ_2 se trouvent tracées trois droites : les droites σ_α, σ_β et une droite exceptionnelle a'_1 qui correspond au point A'_1 et représente le domaine du point uni $(\beta, 1, 4, 2)$.

La droite a'_1 coupe σ_α en un point A'_{21} et σ_β en un point A'_{22}.

9. Si l'on recherche les solutions des congruences

$$\lambda + 65\mu \equiv 0, \qquad \mu + 62\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 79).$$

on voit que l'on a $\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 17$, c'est-à-dire que les systèmes $|C'''_0|$ et $|\overline{C'''_0}|$ coincident.

Désignons par Γ'''_0 les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C'''_0 et obervons que ces dernières passent 18 fois par A et une fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 61)$ elles ne peuvent donc plus passer par le point $(\beta, 1, 4, 2)$. D'autre part, la somme des multiplicités des courbes

C_0''' aux points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 64)$ devant être égale à 79, ces courbes ne peuvent plus passer par $(\alpha, 64)$. On ne conclut que les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_{21} Mais ce point représente l'ensemble des courbes ω'_1, ω'_2, ω'_3, τ_α, on a donc

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_\alpha + 2(\omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3 + \tau_\alpha) + \tau_\beta + \omega''_1 + \omega''_2 + \sigma_\beta.$$

Les courbes Γ_0''' rencontrent ω'_1 en un point et τ_α en trois points. Effectivement, on voit que les courbes C_0''' passent 14 fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 24)$, une fois par $(\alpha, 25)$, une fois par $(\alpha, 25, 1)$; enfin, elles passent trois fois par les points $(\alpha, 1, 1)$ $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$.

Désignons par Φ_3 la projection de Φ_2 à partir du point A'_{21}. Aux domaines des points $(\alpha, 25, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\beta, 61)$ correspondent respectivement sur Φ_3 une droite ω'_1, une cubique gauche τ_α rencontrant ω'_1 en un point et une droite σ_β rencontrant τ_α en un point A'_3.

10. On a $\lambda_4 = 10$, $\mu_4 = 12$. Appelons $\Gamma_0^{(4)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(4)}$ et observons que celles-ci ne peuvent passer par $(\beta, 61)$. D'autre part, elles ne peuvent plus passer trois fois par $(\alpha, 1, 1, 3)$. On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_3 par les hyperplans passant par le point A'_3. Comme ce point représente τ_β, ω''_1, ω''_2, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_\alpha + 2(\omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_2 + \tau_\alpha + \tau_\beta + \omega''_1 + \omega''_2) + \tau_\beta.$$

Les courbes $C_0^{(4)}$ passent 22 fois par A, 10 fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 24)$, une fois par $(\alpha, 25)$, $(\alpha, 25, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$ 10 fois par $(\beta, 1)$, 8 fois par $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 21)$, une fois par $(\beta, 22)$ et par un point $(\beta, 22, 1)$, deux fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$, $(\beta, 2, 1, 2)$.

Soit Φ_4 la projection de Φ_3 à partir de A'_3. Aux domaines des points $(\alpha, 25, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 22, 1)$ correspondent respectivement sur Φ_4 une droite ω'_1, une conique τ_α rencontrant ω'_1 en un point, une conique τ_β rencontrant τ_α en un point A'_4 et une droite ω''_2 rencontrant τ_β en un point.

11. Le système $|C_0^{(5)}|$ est donné par $\lambda_5 = 19$, $\mu_5 = 7$. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent 26 fois par A et ne peuvent plus passer qu'une fois par $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, par conséquent les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ qui leur correspondent sur Φ_4 sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_4.

Les courbes $C_0^{(5)}$ passent 26 fois par A, six fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 24)$, une fois par $(\alpha, 25)$ et par $(\alpha, 25, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, 9 fois par $(\beta, 1)$, cinq fois par $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 21)$, une fois par $(\beta, 22)$ et $(\beta, 22, 1)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, trois fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, $(\beta, 1, 4, 2)$.

Sur la projection Φ_5 de Φ_4 à partir de A'_4 aux domaines des points $(\alpha, 25, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\beta, 1, 4, 2)$, $(\beta, 21, 1)$, $(\beta, 2, 1, 2)$ correspondent respectivement une droite ω'_1, une droite τ_α rencontrant ω'_1 en un point, une droite exceptionnelle a'_1 coupant τ_α en un point A'_5 une droite τ_β coupant a'_1 en un point et une droite ω''_2 coupant τ_β en un point.

Le système $|C_0^{(6)}|$ est donné par $\lambda_6 = 6$, $\mu_6 = 23$. Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(6)}$ sont découpées sur Φ_4 par les hyperplans qui touchent la conique τ_α en A'_4.

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent 29 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 24)$, une fois par $(\alpha, 25)$, $(\alpha, 25, 1)$, une fois par les points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, 20)$, six fois par $(\beta, 1)$, cinq fois par $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 21)$, une fois par $(\beta, 22)$, $(\beta, 22, 1)$, $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$, $(\beta, 2, 1, 2)$.

Soit Φ_6 la projection de Φ_5 à partir de A'_5. Sur cette surface, il correspond aux points $(\alpha, 25, 1)$, $(\alpha, 1, 20)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 22. 1)$, respectivement une droite ω'_1, une droite exceptionnelle a'_2, une droite τ_β et une droite ω''_2.

Les courbes $C_0^{(7)}$ sont données par $\lambda_7 = 28$, $\mu_7 = 2$. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 1, 20)$ ni par le point $(\alpha, 2, 1, 2)$. Il leur correspond sur Φ_4 des courbes $\Gamma_0^{(7)}$ qui sont découpées sur cette surface par les hyperplans la touchant en A'_4. Il en résulte que ce point est double pour ces courbes.

On en déduit que les courbes $C_0^{(7)}$ passent 30 fois par A, deux fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 24)$, une fois par $(\alpha, 25)$, $(\alpha, 25, 1)$, huit fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 21)$, une fois par $(\beta, 22)$, $(\beta, 22, 1)$, six fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$ deux fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, $(\beta, 1, 4, 2)$.

Soit Φ_7 une surface, projection de Φ_6, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$. Sur cette surface, on a une droite ω'_1 qui correspond à $(\alpha, 25, 1)$, une conique exceptionnelle a'_1 qui correspond à $(\beta, 1, 4, 2)$ et une droite ω''_1 qui correspond à $(\beta, 22, 1)$.

12. Occupons-nous maintenant des courbes $C_0^{(8)}$, qui correspondent à $\lambda_8 = 15$, $\mu_8 = 18$. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point

$(\alpha, 25, 1)$. Sur la surface Φ_7, les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ qui leur correspondent sont découpées par les hyperplans passant par le point commun à ω'_1 et a'_1. Or, ce point représente les courbes ω'_2, ω'_3, τ_α. On a donc

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(8)} + \sigma_\alpha + 2\omega'_1 + 3(\omega'_2 + \omega'_3 + \tau_\alpha) + 2(\tau_\beta + \omega''_1 + \omega''_2) + \sigma_\beta.$$

D'après cette relation, les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ devraient rencontrer τ_α en quatre points variables, mais sur Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ ont un point double en A'_4 et les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ qui sont des courbes $\Gamma_0^{(7)}$ particulières, contiennent la conique τ_α et, devant rencontrer τ_β en deux points confondus en A'_4, ont une partie variable qui passe par A'_4. Elles rencontrent encore τ_α en trois points variables et de plus, elles rencontrent ω'_2 en un point variable.

Par suite, les courbes $C_0^{(8)}$ ont la multiplicité 33 en A, passent quinze fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 11)$, une fois par $(\alpha, 12)$ et par deux points $(\alpha, 12, 1)$, $(\alpha, 12, 2)$, trois fois par les points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$. Elles passent en outre cinq fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 21)$, une fois par $(\beta, 22)$, $(\beta, 22, 1)$, trois fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$ $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, $(\beta, 1, 4, 2)$.

Si Φ_8 est une surface dont les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont les sections hyperplanes il correspond sur cette surface une droite ω'_2 au point $(\alpha, 12, 2)$, une cubique gauche τ_α au point $(\alpha, 1, 1, 3)$, une droite exceptionnelle a'_1 au point $(\beta, 1, 4, 2)$ et une droite ω''_2 au point $(\beta, 22, 1)$. La droite a'_1 rencontre τ_α en un point et ω''_2 en un point A'_8.

Les courbes $C_0^{(9)}$ correspondent aux valeurs $\lambda_9 = 2$, $\mu_9 = 34$. Pour ces courbes, le point A est multiple d'ordre 36, elles passent 12 fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 11)$, une fois par $(\alpha, 12)$, $(\alpha, 12, 1)$ $(\alpha, 12, 2)$, trois fois par $(\alpha, 1, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$ et une fois par $(\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, 20)$, deux fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 21)$, une fois par $(\beta, 22)$, $(\beta, 22, 1)$.

Sur la surface Φ_8, les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ homologues des courbes $C_0^{(9)}$, sont découpées par les hyperplans passant par A'_8.

Soit Φ_9 la projection de Φ_8 à partir de A'_8 sur un hyperplan. Aux domaines des points $(\alpha, 12, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 20)$, $(\beta, 22, 1)$ correspondent respectivement une droite ω'_2, une conique τ_α, une droite exceptionnelle a'_2 et une droite ω''_2. Les droites a'_2 et ω''_2 se coupent en un point A'_9.

13. Les courbes $C_0^{(10)}$ qui correspondent aux valeurs $\lambda_{10} = 24$, $\mu_{10} = 13$, passent 37 fois par A et ne peuvent plus passer par les points $(\beta, 22)$, $(\beta, 22, 1)$ et $(\alpha, 1, 20)$. Sur Φ_9, il leur correspond des courbes $\Gamma_0^{(10)}$ qui sont découpées par les hyperplans passant par A'_9. Ce point représente les courbes τ_β, ω'', donc on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(10)} + \sigma_\alpha + 2\omega'_1 + 3(\omega'_2 + \omega''_3 + \tau_\alpha + \tau_\beta + \omega''_1) + 2\omega''_2 + \sigma_\beta.$$

Les courbes $C_0^{(10)}$ passent 11 fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 11)$, une fois par $(\alpha, 12)$, $(\alpha, 12, 1)$, $(\alpha, 12, 2)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, 14 fois par $(\beta, 1)$, 9 fois par $(\beta, 2)$, trois fois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 8)$, une fois par $(\beta, 9)$, $(\beta, 9, 1)$, $(\beta, 9, 2)$, deux fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$ $(\beta, 2, 1, 2)$, trois fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, $(\beta, 1, 4, 2)$.

Sur la surface Φ_{10} projection de Φ_9 à partir de A'_9 il correspond aux domaines des points $(\alpha, 12, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\beta, 1, 4, 2)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 9, 2)$ respectivement une droite ω'_2, une conique τ_α une droite exceptionnelle a'_1, une conique τ_β et une droite ω''_1. La droite a'_1 coupe τ_α en un point A'_{10}.

Les courbes $C_0^{(11)}$ sont donneés par $\lambda_{11} = 11$, $\mu_{11} = 29$. Ces courbes passent 40 fois par A, 8 fois par $(\alpha, 1), \ldots$, une fois par $(\alpha, 12, 2)$, par $(\alpha, 1, 1, 3)$, par $(\alpha, 1, 20)$, 11 fois par $(\beta, 1)$, 9 fois par $(\beta, 2), \ldots$, deux fois par $(\beta, 2, 1, 2)$, une fois par $(\beta, 9, 2)$.

Soit Φ_{11} la projection de Φ_{10} à partir de A'_{10}. Sur cette surface, il correspond aux points $(\alpha, 12, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 20)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 9, 2)$ respectivement une droite ω'_2, une droite τ_α, une droite exceptionnelle a'_2 une conique τ_β et une droite ω''_1. La droite a'_2 rencontre la conique τ_β en un point A'_{11}.

Les courbes $C_0^{(12)}$, données par $\lambda_{12} = 33$, $\mu_{12} = 8$ passent 41 fois par A, sept fois par $(\alpha, 1)$, ..., une fois par $(\alpha, 12, 2)$ et par $(\alpha, 1, 1, 3)$, 13 fois par $(\beta, 1)$, six fois par $(\beta, 2)$, ..., deux fois par $(\beta, 1, 4, 2)$ et une fois par $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 9, 2)$.

Sur la projection Φ_{12} de Φ_{11} à partir de A'_{11} on a une droite ω'_2, une droite τ_α, une conique exceptionnelle a'_1 coupant τ_α en A'_{12} une droite τ_β et une droite ω''_1.

Les courbes $C_0^{(13)}$ correspondent à $\lambda_{13} = 20$, $\mu_{13} = 24$ et passent 44 fois par A, quatre fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 12, 2)$ et par $(\alpha, 1, 20)$, 10 fois par $(\beta, 1)$, six fois par $(\beta, 2)$, ..., une fois par $(\beta, 1, 4, 2)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 9, 2)$. Sur la surface Φ_{13}, projection de Φ_{12} à partir de A'_{12} on a une droite ω'_2, deux droites exceptionnelles a'_1, a'_2 se coupant en un point A'_{13}, et deux droites τ_β et ω'_1.

Les courbes $C_0^{(14)}$, données par $\lambda_{14} = 42$, $\mu_{14} = 3$, ont pour homologues sur la surface Φ_{13} les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ découpées par les hyperplans passant par A'_{13}. Les courbes $C_0^{(14)}$ passent 45 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 11)$, une fois par $(\alpha, 12)$, $(\alpha, 12, 1)$, $(\alpha, 12, 2)$, neuf fois par $(\beta, 1)$, six fois par $(\beta, 2), \ldots$, une fois par $(\beta, 9, 2)$, une fois par $(\beta, 2, 1, 2)$, deux fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 16)$, une fois par $(\beta, 1, 17)$, $(\beta, 1, 17, 1)$.

Sur la surface Φ_{14}, projection de Φ_{13} à partir de A'_{13}, on a une droite ω'_2, une droite exceptionnelle a'_3 qui correspond au domaine du point $(\beta, 1, 17, 1)$, une droite τ_β et une droite ω''_1. La droite a'_1 s'appuie sur ω'_2 en un point A'_{14}.

14. Les courbes $C_0^{(15)}$ correspondent à la solution $\lambda_{15} = 40$, $\mu_{15} = 7$. Les courbes $\Gamma_0^{(15)}$ qui leur correspondent sur Φ_{14} sont découpées par les hyperplans passant par A'_{14}. Or, ce point représente l'ensemble des courbes ω'_3, τ_α, donc on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(15)} + \sigma_\alpha + 2\omega'_1 + 3\omega'_2 + 4(\omega'_3 + \tau_\alpha) + 3(\tau_\beta + \omega''_1) + 2\omega''_2 + \sigma_\beta.$$

D'après cette relation, les courbes $\Gamma_0^{(15)}$ rencontrent ω'_3 en un point, τ_2 en cinq points, τ_β en deux points et ω''_1 en un point. Mais il faut tenir compte pour τ_α et τ_β, de la présence de courbes exceptionnelles sur la surface Φ_{15} projection de Φ_{14} à partir de A'_{14}.

Les courbes $C_0^{(15)}$ passent 47 fois par A, 17 fois par $(\alpha, 1)$, quatre fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 4)$, 3 fois par $(\alpha, 5)$, une fois par des points $(\alpha, 5, 1)$, $(\alpha, 5, 1, 1)$, $(\alpha, 5, 1, 2)$, quatre fois par $(\alpha, 1, 1)$, trois fois par $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$ une fois par $(\alpha, 1, 2), \ldots, (\alpha, 1, 20)$, sept fois par $(\beta, 1)$, six fois par $(\beta, 2), \ldots$, une fois par $(\beta, 2, 1, 2)$, une fois par $(\beta, 9, 2)$.

Sur la surface Φ_{15}, il correspond aux domaines des points $(\alpha, 5, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 20)$, $(\beta, 2, 1, 2)$, $(\beta, 9, 2)$ respectivement une droite ω'_3, une cubique gauche τ_α, une droite exceptionnelle a'_2 une droite τ_β et une droite ω''_1.

On pourrait continuer l'examen des systèmes $C_0^{(16)}, \ldots$, mais c'est inutile, les différentes courbes constituant la structure du point A′ pour la surface Φ ayant été obtenues. Précisément

La structure du point A′ est constituée par neuf courbes

$$\sigma_\alpha, \quad \omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \omega'_3, \quad \tau_\alpha, \quad \tau_\beta, \quad \omega''_1, \quad \omega''_2, \quad \sigma_\beta,$$

chaque courbe rencontrant la suivante et la précédente en un point, mais ne rencontrant pas les autres. Les courbes τ_α, τ_β ont le degré virtuel — 3, *les autres le degré virtuel* — 2.

Ces courbes correspondent aux points suivants :

$$\underset{\sigma_\alpha}{(\alpha,\ 64)} - \underset{\omega_1'}{(\alpha,\ 25,\ 1)} - \underset{\omega_2'}{(\alpha,\ 12,\ 2)} - \underset{\omega_3'}{(\alpha,\ 5,\ 1,\ 2)} - \underset{\tau_\alpha}{(\alpha,\ 1,\ 1,\ 3)}$$

$$\underset{\tau_\beta}{(\beta,\ 2,\ 1,\ 2)} - \underset{\omega_1''}{(\beta,\ 9,\ 2)} - \underset{\omega_2''}{(\beta,\ 22,\ 1)} - \underset{\sigma_\beta}{(\beta,\ 61)}.$$

Liège, le 18 septembre 1954.

Manuscrit reçu le 11 octobre 1954.

M. GODEAUX, à Liège.