Alger, Mathématiques.
Tome IV, nº 1, 1957.

Lucien GODEAUX (Liège.)

SUR LE CONTACT DE DEUX SURFACES ALGÉBRIQUES LE LONG D'UNE COURBE

Sommaire. — Étant données deux surfaces algébriques ayant un contact d'ordre $p - 1$ le long d'une courbe, exposé d'une méthode de détermination des singularités des surfaces F aux points situés sur cette courbe.

Dans une note récente, nous avons démontré que si une surface algébrique d'ordre n, non réglée, touche un plan le long d'une droite a, elle possède $n - 1$ points doubles sur cette droite. Un certain nombre de ces points peuvent être infiniment voisins et former une suite de points doubles biplanaires sauf le dernier qui est conique. Réciproquement, si une surface algébrique possède sur une de ses droites des points doubles formant la configuration précédente, elle touche un plan de cette droite [1]. Nous avons ensuite brièvement indiqué l'extension de ce théorème au cas de deux surfaces se touchant le long d'une courbe irréductible, privée de singularité, mais comme M. d'Orgeval l'a fait remarquer [2], notre énoncé doit être précisé lorsque l'une des surfaces n'est pas un plan.

Considérons deux surfaces algébriques F, F', d'ordres m, m' se touchant le long d'une courbe C, d'ordre n, irréductible, privée de points singuliers. Soit μ la classe de la développable lieu des plans tangents aux deux surfaces aux points de la courbe C. Dans ces conditions, il est facile de voir que la surface F possède

$$r = n(m - 1) - \mu$$

points doubles sur la courbe C et la surface F',

$$r' = n(m' - 1) - \mu.$$

points doubles sur la même courbe. Il importe de remarquer que les points doubles de F, par exemple, situés sur la courbe C, ne sont pas nécessairement isolés, mais peuvent, en tout ou en partie, appartenir à une courbe double de la surface.

Sous cette forme précise, nous avons à plusieurs reprises utilisé ce théorème, notamment pour résoudre dans certains cas un problème posé par F. Enriques : construire les surfaces de l'espace ordinaire dont les sections planes forment le système canonique complet [3]. L'étude du contact des surfaces le long d'une courbe a été repris récemment par M. Gallarati, qui y a apporté des compléments intéressants [4].

Un raisonnement analogue peut être fait lorsque l'on a deux surfaces algébriques ayant un contact d'ordre $p-1$ le long d'une courbe C irréductible et privée de singularités. Nous donnerons ici quelques indications sur la solution de ce problème.

Désignons encore par m, m' les ordres des deux surfaces, par n celui de la courbe C et par μ la classe de la développable lieu des plans tangents aux surfaces aux points de C. La surface F possède encore r points singuliers et F' r' points singuliers sur la courbe C. Nous préciserons plus loin l'évaluation des nombres r er r'.

Supposons $r > 0$ et soit A un des points singuliers considérés de F. Supposons en outre que A ne soit pas singulier pour F' (ce qui a toujours lieu si C, comptée p fois, est l'intersection complète de F et de F', puisque C est par hypothèse privée de point singulier).

Toute courbe γ passant par A et tracée sur F' doit rencontrer F en p points confondus en A. Ceci est réalisé si A est multiple d'ordre p pour F. Supposons que ce point soit multiple d'ordre $q (2 \leqslant q < p)$ pour F. La courbe γ devant rencontrer F en p points confondus en A, le plan tangent à F' au point A doit faire partie du cône tangent en ce point à F.

Choisissons un trièdre dont l'origine est en A, le plan tangent à F' en ce point étant le plan $y = 0$ et l'axe des z étant tangent à la courbe γ en A (et distinct de la tangente à C en A). Les équations de F, F' peuvent s'écrire sous la forme

$$\text{(F)} \qquad y\varphi_{q-1}(x, y, z) + \varphi_{q+1}(x, y, z) + \varphi_{q+2}(x, y, z) + \cdots = 0,$$

$$\text{(F}') \qquad y + \psi_2(x, y, z) + \psi_3(x, y, z) + \cdots = 0,$$

les φ et les ψ étant des formes homogènes dont le degré est indiqué par l'indice.

Opérons la transformation quadratique T,

$$x = x'z', \qquad y = y'z', \qquad z = z',$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de A sur l'axe des z la nouvelle origine. Les équations des transformése F_1, F'_1 de F, F' sont (nous écrivons x, y, z au lieu de x', y', z'),

$$(F_1) \quad y\varphi_{q-1}(x, y, 1) + z\varphi_{q+1}(x, y, 1) + z^2\varphi_{q+2}(x, y, 1) + \cdots = 0,$$
$$(F'_1) \quad y + z\psi_2(x, y, 1) + z^2\psi_3(x, y, 1) + \cdots = 0.$$

A la courbe γ correspond une courbe γ' passant par la nouvelle origine A', tracée sur F'_1 qui doit rencontrer la surface F_1 en $p-q$ points confondus en A'.

Supposons en premier lieu $q = p - 1$. Il suffit alors que la courbe γ' passe par A' pour que la courbe γ rencontre F en p points confondus en A.

Supposons maintenant $q < p - 1$. Si le point A' est simple pour F'_1, cette surface a même plan tangent en ce point que la surface F_1. Ces plans tangents ont respectivement pour équations.

$$y + z\psi_2(0, 0, 1) = 0,$$
$$y\varphi_{q-1}(0, 0, 1) + z\varphi_{q+1}(0, 0, 1) = 0,$$

et on doit avoir

$$\varphi_{q-1}(0, 0, 1)\psi_2(0, 0, 1) = \varphi_{q+1}(0, 0, 1).$$

Supposons au contraire que A' soit multiple d'ordre

$$q'(2 \leqslant q' < p - q)$$

pour la surface F_1. Alors les termes de degré le moins élevé en x, y, z dans l'équation de cette surface auront précisément de degré q'. On aura donc

$$\varphi_{q-1}(0, 0, 1) = 0, \qquad \varphi_{q+1}(0, 0, 1) = 0.$$

De plus, φ_{q-1} contiendra z à la puissance $q - q'$ au plus, φ_{q+1} contiendra z à la puissance $q - q' + 2$ au plus, φ_{q+2} contiendra z à la puissance $q - q' + 4$ au plus, ..., $\varphi_{q+q'}$ contiendra z à la puissance $q + q'$.

Si $q + q' < p$, le plan tangent à F'_1 en A' devra faire partie du cône tangent à F_1 en A'. On opérera sur F_1, F'_1 la transformation T et ainsi de suite.

Finalement, on trouve que sur la courbe γ tracée sur F', la surface F possède un certain nombre de points infiniment voisins successifs du point A, respectivement multiples d'ordres $q' \leqslant q$, $q'' \leqslant q'$, ..., tels que

$$q + q' + q'' + \cdots = p.$$

Cette propriété doit être vérifiée quelle que soit la courbe γ. On en conclut que le point A est multiple d'ordre $q \geqslant 2$ et que la surface F possède une droite multiple d'ordre q' infiniment voisine de A, une droite multiple d'ordre q'' infiniment voisine de la précédente, et ainsi de suite.

Observons pour terminer que si $q > 2$, le point A absorbe au moins $q - 1$ des r points singuliers de F situés sur la courbe C.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Sur les surfaces algébriques touchant un plan le long d'une droite* (Bulletin de l'Acad. roy., de Belgique, 1954, pp. 1194-1198).

[2] *A propos des surfaces algébriques se touchant le long d'une courbe et du nombre maximum de leurs points doubles.* (Publications scient. de l'Université d'Alger, série A, 1955, pp. 247-250.)

[3] *Sur le contact de surfaces cubiques.* (Bull. de la Soc., des Sciences de Liège, 1944, pp. 1-10). *Sur le contact de surfaces le long de courbes* (Idem, 1944, pp. 46-58). *Construction d'une surface canonique du huitième ordre* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1944, pp. 132-144). *Construction d'une surface canonique du neuvième ordre* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1944, pp. 202-212). *Remarque sur le contact des surfaces* (Idem., 1944, pp. 391-396). *Sur la construction de surfaces canoniques de l'espace ordinaire* (Idem., 1945, pp. 288-300). *Sur les surfaces circonscrites à une surface cubique* (Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1947, pp. 110-119). *Remarques sur les surfaces inscrites dans une surface cubique* (Idem., 1950, pp. 150-157). *Sur les surfaces algébriques d'ordre* n *dont les adjointes d'ordre n-4 possèdent une partie fixe* (Rendiconti di Matematica, 1951, pp. 45-56).

[4] *Sul contatto di superficie algebriche lungo curve.* (Annali di Matematica, 1955, s. 4, t. 38, pp. 225-251). *Sulle superficie algebriche dello spazio ordinario che osculano lungo una curva una superficie cubica non rigata.* (Rendiconti di Matematica, 1955, pp. 674-685). *Sulle ipersuperficie cubiche circoscritte ad una quadrica.* (Atti Accad. Ligure di Scienze, 1954, pp. 161-184). Voir aussi B. Segre, *Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche.* (Memorie Accad. d'Italia, 1934, pp. 479-576).

Manuscrit reçu le 27 avril 1957.

Lucien GODEAUX
37, quai Orban, Liège.