Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 26e année, nº 3, 1957, pp. 99-104

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

J. Neuberg a étudié sous le nom de *complexe de Grassmann* le lieu des droites de l'espace qui coupent trois couples de plans suivant trois couples de points d'une même involution (1). Dans une note publiée voici cinquante ans (2), nous avons généralisé cette question de la manière suivante : considérons dans un espace linéaire S_r à r dimensions, $(n+1)^k$ groupes ordonnés de k espaces linéaires à $r - n$ dimensions. Nous considérions le lieu des espaces linéaires à n dimensions qui coupent les $(n+1)^k$ groupes d'espaces à $r - n$ dimensions en des groupes de k points liés par une même relation ponctuelle. Nous voudrions revenir dans cette note sur cette question et y ajouter quelques développements. Cependant dans ceux-ci, pour éviter de trop longs calculs, nous supposerons en général $r = 3$, $n = 2$.

1 — Considérons, dans un espace projectif S_r, à r dimensions ($r \geq 3$), un groupe ordonné de k espaces, linéaires $S^{(1)}_{r-n}$, $S^{(2)}_{r-n}$, ..., $S^{(k)}_{r-n}$ à $r - n$ dimensions. Soient

$$\begin{array}{l}\varphi_{11}(x) = 0,\ \varphi_{12}(x) = 0,\ \dots,\ \varphi_{1n}(x) = 0,\\ \varphi_{21}(x) = 0,\ \varphi_{22}(x) = 0,\ \dots,\ \varphi_{2n}(x) = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_{k1}(x) = 0,\ \varphi_{k2}(x) = 0,\ \dots,\ \varphi_{kn}(x) = 0\end{array}$$

leurs équations respectives.

Un espace linéaire S_n à n dimensions est déterminé par $n+1$ points $x^0, x^1, \dots, x^n$ linéairement indépendants. Tout point de cet espace a des coordonnées de la forme

$$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n$$

(1) J. Neuberg, *Sur le complexe de Grassman* (Mathesis, 1902).

(2) *Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1907, pp. 395-399). Nous avons rédigé cette petite note en août 1906. Nous quittions alors les bancs de l'Athénée royal d'Ath; notre inexpérience à l'époque fait que le travail est assez mal rédigé et c'est une des raisons pour lesquelles nous le reprenons ici.

et on peut considérer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme les coordonnées locales de ce point.

L'espace S_n coupe en général l'espace $S^{(i)}_{r-n}$ en un seul point. Les coordonnées locales de ce point satisfont aux équations

$$\varphi_{ij}(\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_n x^n) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

c'est-à-dire aux équations

$$\lambda_0 \varphi_{ij}(x^0) + \lambda_1 \varphi_{ij}(x^1) + \ldots + \lambda_n \varphi_{ij}(x^n) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coordonnées locales $\lambda_{i0}, \lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in}$ du point considéré s'obtiendront en résolvant les n équations précédentes. Nous écrirons ces solutions sous la forme

$$\frac{\lambda_{i0}}{\Delta_{i0}} = \frac{\lambda_{i1}}{\Delta_{i1}} = \ldots = \frac{\lambda_{in}}{\Delta_{in}},$$

les Δ étant des déterminants à n^2 termes.

Observons que Δ_{i0} ne dépend pas de x^0, mais que les déterminants $\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \ldots, \Delta_{in}$ dépendent linéairement de ce point.

2 — Appelons liaison ponctuelle linéaire entre les groupes de k points de l'espace S_n, une relation linéaire séparément par rapport aux coordonnées de chacun de ces points. Elle se traduira par une relation linéaire par rapport aux coordonnées locales de chacun de ces k points. Si nous désignons par $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$ ces k points, nous aurons donc une relation de la forme

$$\Phi(\lambda^1_0, \ldots, \lambda^1_n; \lambda^2_0, \ldots, \lambda^2_n; \ldots; \lambda^k_0, \ldots, \lambda^k_n) = 0 \tag{1}$$

Cette relation contient $(n+1)^k$ termes.

Supposons que les k points de rencontre de S_n avec les k espaces $S^{(1)}_{r-n}, S^{(2)}_{r-n}, \ldots, S^{(k)}_{r-n}$ satisfassent à la relation précédente. Nous avons

$$\Phi(\Delta_{10}, \ldots, \Delta_{1n}; \Delta_{20}, \ldots, \Delta_{2n}; \ldots; \Delta_{k0}, \ldots, \Delta_{kn}) = 0 \tag{2}$$

Observons que dans la relation précédente, il y a :

un seul terme contenant $\Delta_{10}, \Delta_{20}, \ldots, \Delta_{k0}$;

kn n termes contenant $k - 1$ des déterminants $\Delta_{10}, \Delta_{20}, \ldots, \Delta_{k09}$ et ces termes sont linéaires par rapport aux coordonnées du point x^0;

$\binom{k}{2} n^2$ termes contenant $k - 2$ des déterminants $\Delta_{10}, \Delta_{20}, \ldots, \Delta_{k0}$ et ces termes sont du second degré par rapport aux coordonnées du point x^0;

. . . .

$\binom{k}{p} n^p$ termes contenant $k - p$ des déterminants Δ_{10}, Δ_{20}, ..., Δ_{k0} et ces termes sont de degré p par rapport aux coordonnées du point x^0;

....

$\binom{k}{k} n^k = n^k$ termes ne contenant pas les déterminants Δ_{10}, Δ_{20}, ..., Δ_{k0} et ces termes sont de degré k par rapport aux coordonnées de x^0.

On a évidemment, par la formule du binôme

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} n + \binom{k}{2} n^2 + \ldots + \binom{k}{k} n^k = (n+1)^k.$$

3 — Donnons-nous maintenant dans l'espace S_r, $(n+1)^k$ groupes ordonnés de k espaces linéaires à $n - k$ dimensions. En coupant par l'espace S_n, nous obtiendrons $(n+1)^k$ groupes de k points. Supposons que ces $(n+1)^k$ groupes ordonnés de k points satisfassent à une même liaison ponctuelle linéaire de la forme (1). En exprimant ce fait, nous aurons $(n+1)^k$ relations analogues à la relation (2) et la condition s'exprimera en éliminant les coefficients de la relation (2) entre les $(n+1)^k$ relations obtenues.

Nous obtiendrons ainsi un déterminant Δ, à $(n+1)^{2k}$ éléments, égalé à zéro. Ce déterminant, développé, pourrait s'exprimer au moyen des coordonnées pluckériennes des espaces S_n, car si l'on remplaçait x^0, x^1, ..., x^n par un groupe de $n + 1$ autres points linéairement indépendants de S_n, la forme du déterminant Δ ne serait pas modifiée.

Les espaces linéaires à n dimensions dans S_r dépendent de $(r - n)$ $(n + 1)$ paramètres; ceux qui satisfont à la condition imposée forment donc un système Σ de dimension

$$(r - n)(n + 1) - 1.$$

Les espaces S_n de Σ passant par un espace S_{n-1} forment un cône de dimension $r - n - 1$. Supposons que l'espace à $n - 1$ dimensions choisi soit précisément l'espace déterminé par les n points x^1, x^2, ..., x^n. L'équation $\Delta = 0$ est de degré

$$N = \binom{k}{1} n + 2 \binom{k}{2} n^2 + \ldots + p \binom{k}{p} n^p + \ldots + k \binom{k}{k} n^k.$$

en x^0. Si l'on fixe x^1, x^2, ..., x^n et que l'on prend comme coordonnées courantes celles de x^0, on voit que le cône en question est d'ordre N.

Les espaces linéaires à n dimensions de S_r, *coupant* $(n+1)^k$, *groupes ordonnés de k espaces linéaires à* $r-n$ *dimensions suivant* $(n+1)^k$ *groupes ordonnés de k points homologues dans une même liaison linéaire et passant par un espace linéaire à* $n-1$ *dimensions, forment un cône d'ordre* N.

4 — Reprenons la relation (1). Elle est complètement déterminée lorsque l'on se donne dans S_n, $(n+1)^k-1$ groupes ordonnés de k points. Si l'on prend, dans un certain ordre, $k-1$ points de S_n, le k-ième point du groupe décrit un hyperplan de S_n.

Cela étant, un espace S_n coupant un des espaces à $r-n$ dimensions d'un des $(n+1)^k$ groupes donnés, appartient à Σ.

Le nombre des conditions pour qu'un espace S_n coupe un espace S_{r-n} suivant une droite est égal à deux. On obtient ainsi dans Σ, $k(n+1)^k$ systèmes à $(r-n)(n+1)-2$ dimensions.

5 — Supposons dans ce qui précède $r=3$, $n=2$, $k=2$. La liaison ponctuelle devient une réciprocité du plan S_2 et on obtient le résultat suivant :

Les plans de S_3 *coupant neuf couples ordonnés de droites suivant neuf couples ordonnés de points conjugués dans une réciprocité, enveloppent une surface* Σ *de classe douze.*

Les faisceaux de plans ayant pour axes les droites des neuf couples donnés appartiennent à Σ.

La ligne générale du déterminant Δ, contenant les termes provenant d'un même couple de droites, contient les éléments

$$\Delta_{10}\,\Delta_{20},\ \Delta_{10}\,\Delta_{21},\ \Delta_{10}\,\Delta_{22},\ \Delta_{11}\,\Delta_{20},\ \Delta_{12}\,\Delta_{20},$$
$$\Delta_{11}\,\Delta_{21},\ \Delta_{11}\,\Delta_{22},\ \Delta_{12}\,\Delta_{21},\ \Delta_{12}\,\Delta_{22}.$$

Donnons-nous maintenant dix couples ordonnés de droites. Les plans de l'espace qui rencontrent les droites de ces couples en des couples de points ordonnés homologues dans une même réciprocité engendrent une développable Σ_0.

Pour déterminer la classe de cette développable Σ_0, fixons le point x^2 et faisons décrire au point x^0 la droite $x_0=x_1=0$ et au point x^1, la droite $x_2=x_3=0$. Posons

$$y_0 : y_2 = x_2^0 : x_3^0, \qquad y_1 : y_2 = x_0^1 : x_1^1.$$

Les équations de Σ_0 sont les déterminants d'une matrice M à dix lignes et neuf colonnes égalée à zéro. Les lignes sont de même nature que celles du déterminant Δ.

Observons que par rapport aux y, les termes $\Delta_{10}\,\Delta_{20}$, $\Delta_{10}\,\Delta_{21}$, $\Delta_{11}\,\Delta_{20}$, $\Delta_{11}\,\Delta_{21}$ sont de degré deux, les termes $\Delta_{10}\,\Delta_{22}$, $\Delta_{12}\,\Delta_{20}$, $\Delta_{11}\,\Delta_{22}$, $\Delta_{12}\,\Delta_{21}$ de degré trois et le terme $\Delta_{12}\,\Delta_{22}$ de degré quatre. On en conclut que la matrice M s'annule pour 322 systèmes de valeurs de y_0, y_1, y_2. Mais les valeurs $y_0 = y_2 = 0$, et $y_1 = y_2 = 0$ ne peuvent convenir. Or chacune de ces valeurs annule 82 fois la matrice M. On en conclut qu'il existe $322 - 2 \times 82 = 158$ plans déterminés par un point fixe et par deux points situés sur deux droites gauches a, b, coupant dix couples ordonnés de droites en dix couples ordonnés conjugués dans une même réciprocité.

Ce nombre 158 ne varie pas lorsque la droite b varie d'une manière continue et vient occuper une position rencontrant a. Mais les plans se répartissent alors en deux catégories : ceux qui passent par le point commun aux droites a, b (il y en a 82) et les autres qui sont les plans de Σ_0 rencontrant le plan ab suivant une droite. On en conclut que la classe de Σ_0 est égale à $158 - 82 = 76$.

6 — Appelons A_i le i-ième groupe de deux droites données et a_{i1}, a_{i2} les droites qui le composent.

Les plans rencontrant les droites de $A_1, A_2, \ldots, A_9$ en des couples de points conjugués dans une même réciprocité forment une surface enveloppe Σ de classe douze. Ceux qui rencontrent les droites de $A_1, A_2, \ldots, A_8, A_{10}$ dans les mêmes conditions forment une surface-enveloppe Σ_1 de classe douze. Les surfaces Σ, Σ_1 ont en commun une développable de classe 144 dont fait partie Σ_0. Il reste une développable de classe 68. Observons qu'un plan passant par une droite de l'un des couples $A_1, A_2, \ldots, A_8$ appartient à la fois à Σ et à Σ_1; ces 16 faisceaux de plans défalqués, il reste une développable de classe 52. Les plans de cette dernière développable coupent les couples de droites $A_1, A_2, \ldots, A_8$ en huit couples ordonnés de points appartenant à ∞^1 réciprocités.

Les plans qui coupent dix couples ordonnés de droites suivant dix couples ordonnés de points appartenant à une même réciprocité, enveloppent une développable de classe 76.

Les plans qui coupent huit couples ordonnés de droites suivant huit couples ordonnés de points appartenant à ∞^1 *réciprocités, enveloppent une développable de classe* 52.

7 — Nous allons maintenant nous occuper d'un problème voisin du précédent.

Donnons-nous six couples de droites $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et considérons les plans qui coupent ces droites en six couples de points homologues dans une polarité.

En raisonnant comme plus haut nous obtiendrons un déterminant Δ' à 36 éléments, égalé à zéro. La ligne générique de Δ' sera formée des éléments

$\Delta_{10}\,\Delta_{20}$, $\Delta_{11}\,\Delta_{21}$, $\Delta_{12}\,\Delta_{22}$, $\Delta_{11}\,\Delta_{22} + \Delta_{12}\,\Delta_{21}$, $\Delta_{10}\,\Delta_{21} + \Delta_{11}\,\Delta_{20}$, $\Delta_{10}\,\Delta_{22} + \Delta_{12}\,\Delta_{20}$,

qui sont respectivement de degrés 0, 2, 2, 1, 1, 2 par rapport aux coordonnées de x^0.

On en conclut que *les plans coupant six couples de droites en six couples de points homologues dans une même polarité enveloppent une surface de classe huit*, Σ'.

Les plans passant par une des douze droites appartiennent à Σ'.

Si l'on se donne sept couples de droites, on arrive au résultat suivant :

Les plans qui coupent sept couples de droites en sept couples de points homologues dans une même polarité enveloppent une développable de classe 41.

Les plans qui coupent cinq couples de droites en cinq couples de points homologues, dans ∞^1 *polarités enveloppent une développable de classe* 13.

Ces raisonnements pourraient s'étendre au cas où r, n et k sont quelconques, mais donneraient lieu à des calculs compliqués (1).

Liège, le 13 mars 1957.

(3) Nous avons utilisé des méthodes analogues dans l'étude de certains systèmes de droites; voir nos notes *Sur quelques complexes particuliers* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique 1907, pp. 17-27), *Sur une classe de congruences de droites* (L'Enseignement Mathématique, 1909, pp. 123-125), *Sur les droites des surfaces cubiques d'un système linéaire* (Mathesis, 1956, pp. 12-15). Voir aussi STUYVAERT, *Sur l'usage des matrices dans l'étude des congruences de droites* (L'Enseignement Mathématique, 1910, pp. 489-512).