Bull. Soc. Royale Sciences, Liège, 27e année, n° 9-10, 1958, pp. 217-220

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA SURFACE FOCALE COMMUNE DE QUATRE CONGRUENCES W

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Pour ne pas allonger inutilement cette note, nous conserverons les notations définies dans notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé* (1).

Si nous considérons la suite de Laplace ..., U, V, ... associée dans l'espace à cinq dimensions à une surface (x) et si nous désignons par M, M′ les points de rencontre de la droite $V_1 V_2$, par N, N′ ceux de la droite $U_1 U_2$ avec l'hyperquadrique Q de Klein, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de (x) est que les points M, M′ décrivent des réseaux conjugués à la congruence $(V_1 V_2)$ et que les points N, N′ décrivent également des réseaux conjugués à la congruence $(U_1 U_2)$. Nous avons montré que dans ces conditions, le point A du plan $VV_1 V_2$ intersection des droites MM^{01} et $M'M'^{01}$, est le transformé de Laplace dans le sens des v du point B, intersection des droites NN^{10}, $N'N'^{10}$ du plan $UU_1 U_2$. B est alors le transformé de Laplace de A dans le sens des u.

Deux congruences W ayant une nappe focale commune (x) étant données, on peut leur associer une suite de Laplace dont les points consécutifs se trouvent dans les plans déterminés par trois points successifs de la suite ..., U, V, ... Cela étant, donnons-nous deux suites de Laplace associées à deux couples de congruences W ayant une nappe focale commune (x). Soient A le point de la première suite situé dans le plan $VV_1 V_2$ et B le point de la seconde suite situé dans le plan $UU_1 U_2$. L'objet de cette note est de démontrer que si le point B est le transformé de

(1) Actualités scient., N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Laplace du point A dans le sens des u (et A celui de B dans le sens des v), les asymptotiques se correspondent sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x).

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v et soient U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x). Nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0 .$$

Considérons deux congruences W ayant (x) comme surface focale. Les droites de ces congruences sont représentées sur Q par des points

$$J = \lambda U - \mu V, \qquad J' = \lambda' U - \mu' V$$

et on a

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0,\ \mu^{10} + 2b\lambda = 0,\ \lambda'^{01} + 2a\mu' = 0,\ \mu'^{10} + 2b\lambda' = 0.$$

Les transformés de Laplace successifs de J, J' dans le sens des u sont

$$J_{-1} = \lambda V_1 - \lambda_1 V, \quad J_{-2} = \lambda_1 V_2 - \lambda_2 V_1, \ldots,$$
$$J'_{-1} = \lambda' V_1 - \lambda'_1 V, \quad J'_{-2} = \lambda'_1 V_2 - \lambda'_2 V_1, \ldots .$$

Le point A, intersection des droites $J_{-1} J_{-2}$, $J'_{-1} J'_{-2}$ est donné par

$$A = \begin{vmatrix} V & V_1 & V_2 \\ \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda' & \lambda'_1 & \lambda'_2 \end{vmatrix}$$

et ce point décrit un réseau conjugué (u, v).

Le transformé de Laplace de A dans le sens des u est

$$A_{-1} = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix}$$

et on a

$$[A^{10} - A (\log . a^3k_1^2k_2)^{10}] \ |\lambda_1 \lambda_2| - A\, |\lambda_1 \lambda_3| = A_{-1} |\lambda \lambda_2|,$$

où nous écrivons $|\lambda_1 \lambda_2|$ pour $\lambda_1 \lambda'_2 - \lambda_2 \lambda'_1, \ldots$.

Le transformé de Laplace A_1 de A dans le sens des v est

$$A_1 = \begin{vmatrix} U & V & V_1 \\ \mu & \lambda & \lambda_1 \\ \mu' & \lambda' & \lambda'_1 \end{vmatrix}$$

et on a

$$A^{01}\,|\lambda\,\lambda_1| + 2aA\,|\mu\,\lambda_1| = -2a\,A_1\,|\lambda_1\,\lambda_2|.$$

Nous désignerons cette suite de Laplace ... $A_1\,A\,A_{-1}$ ... par suite de Laplace associée aux congruences (J), (J′).

2. Considérons deux autres congruences W ayant (x) comme surface focale et dont les droites sont représentées sur Q par les points

$$I = l\,U - m\,V, \quad I' = l'\,U - m'\,V.$$

Les transformés successifs de Laplace de I, I' dans le sens des v sont

$$I_1 = m\,U_1 - m_1\,U, \quad I_2 = m_1\,U_2 - m_2\,U_1, \dots,$$
$$I'_1 = m'\,U_1 - m'_1\,U, \quad I'_2 = m'_1\,U_2 - m'_2\,U_1, \dots .$$

Le point B, intersection des droites $I_1\,I_2$, $I'_1\,I'_2$ est donné par

$$B = \begin{vmatrix} U & U_1 & U_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ m' & m'_1 & m'_2 \end{vmatrix}$$

Le transformé de Laplace B_1 de B dans le sens des v est donné par

$$B_1 = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{vmatrix}$$

et on a

$$[B^{01} - B\,(\log .\, b^3h_1^2h_2)^{01}]\,|m_1\,m_2| - B\,|m_1\,m_2| = B_1\,|m\,m_1|.$$

Le transformé de Laplace de B dans le sens des u est

$$B_{-1} = \begin{vmatrix} V & U & U_1 \\ l & m & m_1 \\ l' & m' & m'_1 \end{vmatrix}$$

et on a

$$B^{10}\,|m\,m_1| + 2b\,B\,|l\,m_1| = -2b\,B_{-1}\,|m_1\,m_2|.$$

3. Les suites de Laplace ..., A_1, A, A_{-1}, ... et ..., B_{-1}, B, B_1, ... sont en général distinctes. Supposons qu'elles coïncident et que, d'une manière précise, le transformé de Laplace de A dans le sens des u soit le point B. Alors les plans UU_1U_2 et $V_1V_2V_3$ ont un

point commun et appartiennent à un espace linéaire à quatre dimensions ξ.

L'espace ξ ne peut contenir le point V, car alors l'espace $U_2U_1UVV_1V_2$ coïnsiderait avec ξ. Les plans UU_1U_2 et VV_1V_2, qui sont conjugués par rapport à Q, auraient un point commun et la quadrique de Lie relative au point x serait dégénérée, ce qui est impossible. Le point V n'appartient donc pas à l'espace ξ.

Entre les points $U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3$ nous avons la relation

$$2V_3 + V_2 (\log . a^3k_1^2k_2)^{10} + 2\alpha_1 V_1 + \alpha (\log a^2\alpha)^{10} V + \\ + 4b\,[\beta U + U_1 (\log bh_1)^{01} + U_2] = 0,$$

nous devons donc avoir $\alpha (\log a^2\alpha)^{10} = 0$.

En intervertissant les rôles des points A, B, nous aurons de même $\beta (\log b^2\beta)^{01} = 0$.

On a donc :

$\alpha = 0$, $\beta = 0$ et les quadriques de Lie de (x) n'ont que deux points caractéristiques. Les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe.

$\alpha = 0$, $(b^2\,\beta)^{01} = 0$, ou $\beta = 0$, $(a^2\,\alpha)^{10} = 0$ et les quadriques de Lie de (x) n'ont que trois points caractéristiques. Les asymptotiques se correspondent sur les trois nappes de l'enveloppe.

$(a^2\,\alpha)^{10} = 0$, $(b^2\,\beta)^{01} = 0$ et les asymptotiques se correspondent sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de (x).

Liège, le 19 mai 1958.