Points de diramation des surfaces multiples,

Résumé de la communication faite le 16 décembre 1950

par Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Nous avons montré que l'on peut prendre comme modèle projectif d'une surface F contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p, une surface normale de l'espace S_r sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie cyclique H possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, le premier seul rencontrant la surface, les points de rencontre étant les points unis.

Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution. Le système $|C_0|$, dont les courbes sont découpées par les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, est dépourvu de points-base. En projetant F de l'espace minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ sur σ_0, on obtient une surface Φ, image de l'involution, dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0.

Soit A un point de diramation isolé de l'involution. Le plan tangent à F en A coupe un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ suivant une droite (point uni de première espèce) ou deux de ces espaces chacun suivant un point (point uni de seconde espèce). Supposons que ce dernier cas se présente, le plan tangent à F en A s'appuyant en un point A_1 sur σ_1 et en un point A_2 sur σ_2 par exemple. Soient t_1 la droite AA_1, t_2 la droite AA_2.

Appelons C_0' les courbes C_0 passant par A ; elles y touchent les droites t_1, t_2. Soient C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2. Elles ont en A une multiplicité supérieure à celle des courbes C'_i et ont également comme tangentes en ce point les droites t_1, t_2. Soient C''' les courbes C''_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2, et ainsi de suite.

On obtient ainsi sur F une suite de systèmes linéaires $|C'_0|$, $|C''_0|$, $|C'''_0|, \ldots$ ayant des multiplicités croissantes en A et y ayant comme tangentes t_1, t_2, sauf le dernier, qui a en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Rapportons le plan tangent en A à F au triangle AA_1A_2 et soit ϵ une racine primitive d'ordre p de l'unité. Dans ce plan, l'homographie H détermine l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^a x_3,$$

où a est supérieur à l'unité et inférieur à p.

Si nous désignons par λ_i le nombre des tangentes aux courbes $C_0^{(i)}$ confondues avec t_1 et par μ_i le nombre des tangentes confondues avec t_2, ces nombres satisfont à la congruence

$$\lambda_i + a\mu_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Si β est un entier compris entre 1 et p, tel que

$$a\beta \equiv 1, \qquad (\text{mod. } p),$$

les nombres λ_i, μ_i satisfont également à la congruence

$$\mu_i + \beta\lambda_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Les hyperplans passant par $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}$ découpent sur F des courbes C_1 passant simplement par A en y touchant t_1. Les hyperplans passant par $\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}$ découpent sur F des courbes C_2 passant également simplement par A mais en y touchant t_2.

Les courbes C_1, C_2 rencontrent chacune des courbes C'_0, C''_0, ... en p points confondus en A.

Désignons par Φ_1 la projection de la surface Φ à partir du point de diramation A sur un hyperplan de σ_0. Les sections hyperplanes Γ'_0 de Φ_1 correspondent aux courbes C'_0.

Sur les courbes C'_0, le point A est l'origine de différentes branches ayant en commun un certain nombre de points fixes, situés dans des domaines successifs de A. Désignons les derniers de ces points sur chaque branche par P_1, P_{11}, P_{12},... pour les branches tangentes à t_1 en A, par P_2, P_{21}, P_{22},... pour les branches touchant t_2 en A. Nous supposerons que les courbes C_1 passent par P_1 et les courbes C_2 par P_2.

Les points P_1, P_{11}, ..., P_2, P_{21},... sont unis de première espèce pour l'involution. Aux domaines de ces points correspondent sur la surface Φ_1 des courbes rationnelles σ_1, τ_{11}, ..., σ_2, τ_{21}, ... dont les ordres sont égaux aux multiplicités des points correspondants pour les courbes C_0'. Le domaine du point de diramation A sur Φ est équivalent à l'ensemble de ces courbes.

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes étant confondues avec t_1 et μ_1 avec t_2. Elles ont en commun une suite de $\beta - 1$ points infiniment voisins successifs de A dont le premier est sur t_1, le dernier étant P_1 et une suite de $\alpha - 1$ points infiniment voisins successifs de A dont le premier est sur t_2, le dernier étant P_2.

Supposons que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = kp.$$

Si $h = 1$, les points P_{21}, P_{22},... n'existent pas. De même, si $k = 1$, les points P_{11}, P_{12},... n'existent pas. Le point A est équivalent à l'ensemble de deux courbes rationnelles σ_1, σ_2.

Suppposons maintenant $k > 1$.

Les courbes C_0' ont en P_1 une multiplicité λ_1' inférieure à λ_1. Parmi les solutions des congruences envisagées plus haut, se trouve la solution $\lambda_i = \lambda_1'$, μ_i. Cela signifie que les courbes $\Gamma_0^{(i)}$, qui correspondent sur Φ_1 aux courbes $C_0^{(i)}$, sont découpées par des hyperplans qui ne rencontrent pas les courbes τ_{11}, τ_{12}, ... en des points variables. On en conclut que les courbes Γ_0'', qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C_0'', sont découpées sur

Φ_1 par les hyperplans passant par un point de l'une des courbes τ_{11}, τ_{12}, ..., par exemple par un point A' de τ_{11}.

Parmi les courbes Γ_0'', ..., $\Gamma_0^{(i-1)}$, qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C_0'', ..., $C_0^{(i-1)}$, il en est qui sont découpées par les hyperplans dont tous les points de rencontre avec τ_{11} sont absorbés en A'.

Faisons l'hypothèse que le cône tangent en A à la surface Φ ne possède que des droites doubles, c'est-à-dire que les points de rencontre des courbes τ_{12}, τ_{13}, ... avec τ_{11} soient distincts de A'. Alors, pour qu'il existe des hyperplans ne rencontrant plus les courbes τ_{11}, τ_{12}, τ_{13}, ... en des points variables, il faudrait que les points P_{12}, P_{13}, ... fussent infiniment voisins de P_{11}, ce qui est absurde. On en conclut que les points P_{12}, P_{13}, ... ne peuvent exister.

Cela étant, si $h = 1$, $k > 1$, le point de diramation A de Φ est équivalent à l'ensemble de trois courbes rationnelles σ_1, τ_{11}, σ_2. Si $h > 1$, $k > 1$, il est équivalent à l'ensemble de quatre courbes rationnelles σ_1, τ_{11}, τ_{21}, σ_2.

Observons que la surface Φ_1 peut posséder des suites de points doubles infiniment voisins successifs aux points communs aux courbes σ et τ.

Dans l'hypothèse où le cône tangent à la surface au point de diramation A *ne possède que des droites doubles, ce cône se décompose en deux, trois ou quatre cônes rationnels.*

BIBLIOGRAPHIE

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scient.*, N° 270, Paris, Hermann, 1935).

Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938).

Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales scient. de l'École Norm. Sup.*, 1938).

Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Annales scient. de l'École Norm. Sup.*, 1948).

Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation (*Annali di Matematica*, 1949).

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples (*Bul. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1949).

Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation (*Annales scient. de l'École Norm. Sup.*, 1949).

Structure des points de diramation d'une surface multiple d'ordre 29 (*Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1950).