Sur certaines surfaces aux points desquelles sont associées des quadriques dégénérées

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Dans nos travaux antérieurs, nous avons attaché à chaque point d'une surface (x) une suite de quadriques Φ, Φ_1, Φ_2,... dont la première est la quadrique de Lie. Lorsque cette quadrique ne possède que deux ou trois points caractéristiques, la quadrique Φ_1 dégénère; nous allons montrer qu'elle peut dégénérer dans d'autres cas (1).

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

A chaque point x de la surface (x), nous attachons le tétraèdre de Cartan, dont les sommets sont les points de rencontre de la quadrique de Lie Φ et des directrices de Wilczynski, à savoir les points

$$x,\ m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10}.\ n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01}.$$
$$y = [8\,ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x + 2\,x^{10}(\log b)^{01} + 2\,x^{01}(\log a)^{10} - 4\,x^{11}.$$

---

(1) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace règlé* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41). Voir aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace règlé* (Actualités scient., No 138; Paris, Hermann, 1934), dont nous utilisons les notations.

Les coordonnées locales d'un point sont z_1, z_2, z_3, z_4 exprimant que les coordonnées générales du point sont données par

$$z_1\, x + z_2\, m + z_3\, n + z_4\, y.$$

L'équation locale de la quadrique de Lie Φ est

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Les points caractéristiques de cette quadrique sont, outre le point x, quatre points $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ dont les coordonnées peuvent s'écrire

$$\begin{array}{rrrrl} \xi\eta, & \eta, & \xi, & -1, & (D_{11}) \\ -\xi\eta, & -\eta, & \xi, & -1, & (D_{12}) \\ -\xi\eta, & \eta, & -\xi, & -1, & (D_{21}) \\ \xi\eta, & -\eta, & -\xi, & -1, & (D_{22}) \end{array}$$

où ξ, η sont une solution des équations

$$\xi^2 + \alpha = 0,\ \eta^2 + \beta = 0, \tag{1}$$

α et β ayant pour expressions

$$\alpha = 2\,(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4\,(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4(a^{10} + c_2).$$

2. La quadrique Φ_1 a pour équation

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \theta\,(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0,$$

où l'on a posé

$$\theta = \frac{1}{2a}\,\beta\,(\log b^2\beta)^{01} = \frac{1}{2b}\,\alpha\,(\log a^2\,\alpha)^{10}.$$

On sait que cette quadrique passe par les arêtes $D_{11}\, D_{12}$, $D_{12}\, D_{22}$, $D_{22}\, D_{21}$, $D_{21}\, D_{11}$ du tétraèdre de Demoulin, dont les sommets sont les points caractéristiques de la quadrique de LieΦ. On en conclut que Φ_1 ne peut être un cône.

Exprimons que la quadrique Φ_1 dégénère; on a

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -\theta \\ 0 & 2\alpha & -\theta & 0 \\ 0 & -\theta & 2\beta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 2\alpha\beta \end{vmatrix} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(4\alpha\beta - \theta^2)^2 = 0.$$

Sous cette condition, tous les mineurs du déterminant précédent sont nuls et Φ_1 est bien dégénérée en deux plans.

Observons que si l'un des nombres α, β est nul, θ est également nul.

Cela étant, trois cas peuvent se présenter :

1°) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\theta = 0$. La quadrique de Lie n'a que deux points caractéristiques x, $\bar{x}$ et la quadrique Φ_1 se réduit au plan tangent à la surface $(\bar{x})$ compté deux fois. (¹).

2°) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\theta = 0$ ou, symétriquement, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\theta = 0$. La quadrique de Lie n'a que trois points caractéristiques. Nous avons étudié ce cas autrefois (²).

3°) Aucune des fonctions α, β, θ n'est identiquement nulle.

3. Les quantités ξ, η étant les racines des équations (1) choisies plus haut, la relation

$$4\alpha\beta - \theta^2 = 0$$

se réduit à

$$(2\,\xi\eta + \theta)\,(2\,\xi\eta - \theta) = 0\,.$$

Supposons en premier lieu

$$\theta = 2\,\xi\eta.$$

(¹) *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1928, pp. 158-186, 345-348); *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (idem., 1928, pp. 455-460).

(²) *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (Bull. de la Soc. Math. de France, 1929, pp. 26-41).

L'équation de la quadrique Φ_1 se réduit à

$$(z_1 - \xi\eta z_4)^2 - (\xi z_2 + \eta z_3)^2 = 0.$$

Elle se compose donc de deux plans. L'un de ceux-ci,

$$z_1 - \xi\eta z_4 + \xi z_2 + \eta z_3 = 0$$

est le plan $D_{12}\, D_{21}\, D_{22}$; l'autre,

$$z_1 - \xi\eta z_4 - (\xi z_2 + \eta z_3) = 0,$$

coïncide avec le plan $D_{12}\, D_{21}\, D_{11}$.

La quadrique Φ_1 se réduit donc aux deux faces du tétraèdre de Demoulin passant par l'arête $D_{12}\, D_{21}$, n'appartenant pas à la quadrique de Lie Φ.

Si l'on suppose

$$\theta = 2\,\xi\eta,$$

la quadrique Φ_1 se réduit à

$$(z_1 + \xi\eta z_4)^2 - (\xi z_2 - \eta z_3)^2 = 0.$$

Elle est formée des deux faces du tétraèdre de Demoulin passant par l'arête $D_{11}\, D_{22}$, qui n'appartient pas à la quadrique de Lie Φ.

4. En résumé, *les quadriques* Φ_1 *dégénèrent en deux plans lorsque* :

1°) *Les quadriques de Lie n'ont que deux points caractèristiques*;

2°) *Les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques*;

3°) *Lorsque l'on a* $4\alpha\beta - \theta^2 = 0$. *Les quadriques* Φ_1 *dégénèrent dans ce cas en deux faces du tétraèdre de Demoulin ayant en commun une arête n'appartenant pas à la quadrique de Lie.*

Liège, le 15 avril 1953.