L'involution de Geiser,

par L. Godeaux,
Membre de l'Académie Royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liège.

(Résumé de la communication faite le 17 mai 1952).

1. L'involution de Geiser est l'ensemble des couples de points P_1, P_2 intersections variables des cubiques planes C passant par sept points fixes $O_1, O_2, \ldots, O_7$.

La transformation birationnelle involutive T, génératrice de l'involution, c'est-à-dire faisant correspondre P_2 à P_1 (et P_1 à P_2), possède les propriétés suivantes [1] :

A une droite, T fait correspondre une courbe du huitième ordre passant trois fois par les points $O_1, O_2, \ldots, O_7$.

Aux points infiniment voisins de O_i, T fait correspondre les points de la cubique C_i, appartenant au réseau $|C|$, ayant un point double en O_i.

La courbe unie de la transformation T est une courbe du sixième ordre passant deux fois par chacun des points $O_1, O_2, \ldots, O_7$. Au point O_i, les tangentes à cette courbe sont tangentes à la courbe C_i.

Observons qu'aux cubiques planes Γ_3 passant par les points $O_1, O_2, \ldots, O_6$, T fait correspondre des courbes du sixième ordre Γ_6 passant deux fois par chacun des points $O_1, O_2, \ldots, O_6$ et trois fois par O_7.

2. Désignons par σ le plan contenant le réseau $|C|$ et rapportons projectivement les cubiques Γ_3 aux plans de l'espace. Aux points du plan σ correspondent les points d'une surface cubique F, en général dépourvue de points multiples. Aux domaines des points $O_1, O_2, \ldots, O_6$ correspondent respectivement sur F des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ deux à deux gauches. Au point O_7 correspond un point O de la surface F et aux courbes C, qui sont les cubiques

---

[1] Voir L. Godeaux, *Géométrie Algébrique* (Liège, Sciences et Lettres et Paris, Masson, 1949), tome II, pp. 194-197.

Γ_3 passant par O_7, correspondent les sections de F par les plans passant par O.

Aux points d'un couple P_1, P_2 de l'involution de Geiser correspondent les points P'_1, P'_2 en lesquels les droites passant par O coupent encore F. Soit T' la transformation birationnelle de F en soi qui correspond à T et qui fait donc se correspondre P'_1, P'_2.

A la droite a_1, T' fait correspondre la conique qui, avec a_1, forme l'intersection de F avec le plan Oa_1. On sait qu'à cette conique correspond la cubique C_1. On obtient des résultats analogues en partant des droites a_2, a_3, ..., a_6.

A une section plane Γ'_6 de F, ne passant pas par O, correspond une courbe Γ'_3 s'appuyant en deux points sur chacune des droites a_1, a_3, ..., a_6. Puisque Γ'_6 correspond à une courbe Γ_6 du sixième ordre, elle est la section de F par une quadrique Q. La courbe Γ_6 a un point triple en O_7, donc la courbe Γ'_6 doit avoir un point triple en O ; en d'autres termes, la quadrique Q doit avoir un contact du second ordre avec F en O.

La transformation T' fait correspondre aux plans de l'espace les quadriques Q ayant avec F en O un contact du second ordre, donc ayant entre elles un contact du second ordre. Cette transformation T' s'étend à tout l'espace.

Sur F, T' fait correspondre aux points infiniment voisins de O les points de la section de F par le plan tangent en O, section qui correspond à la courbe C_7.

3. La transformation T' a pour équations

$$\frac{x'_1}{x_1^2} = \frac{x'_2}{x_1x_2} = \frac{x'_3}{x_1x_3} = \frac{x_4}{x_2x_3 - x_1x_4},$$

le point O ayant pour coordonnées 0, 0, 0, 1 et le plan tangent à F en O ayant pour équation $x_1 = 0$.

La surface F a une équation de la forme

$$x_4^2x_1 - x_4x_2x_3 + \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

φ_3 étant un polynome du troisième degré.

La courbe unie de la transformation T' sur F est découpée par la quadrique

$$2x_1x_4 - x_2x_3 = 0.$$

4. Nous allons maintenant étudier un cas particulier de la transformation.

Supposons que le système linéaire $|\Gamma_3|$ des cubiques planes passant par six points $O_1, O_2, \ldots, O_6$ soit transformé en soi par une transformation birationnelle involutive T. Rapportons projectivement les courbes Γ_3 aux plans de l'espace et soit F la surface cubique obtenue. A T correspond une transformation birationnelle involutive T' de F en soi qui échange entre elles les sections planes de la surface et est donc déterminée sur celle-ci par une homographie harmonique de l'espace. Nous nous limiterons au cas où cette homographie est une homologie harmonique.

Le centre O de l'homologie T' appartient nécessairement à F et par conséquent les sections de F par les plans passant par O sont unis pour T'. Soit O_7 le point du plan σ qui correspond à O. Les courbes Γ_3 passant par O_7 sont unies pour la transformation T et par suite celle-ci est une transformation génératrice d'une involution de Geiser, mais, comme on va le voir, une transformation particulière.

Les équations de T' peuvent s'écrire

$$\frac{x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_2} = \frac{x_3}{x_3} = \frac{x_4}{-x_4}$$

et par conséquent la surface F a une équation de la forme

$$x_4^2\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où φ_1, φ_3 sont des polynômes respectivement de degrés un et trois.

Le plan tangent à F au point O coupe la surface suivant trois droites

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_3 = 0,$$

passant par O. Ce point est donc un point d'Eckhardt de la surface. Désignons par a_1, a_2, a_3 ces trois droites. Il leur correspond, dans le plan σ, trois droites a_1', a_2', a_3' passant par le point O_7.

Modifions nos notations et appelons a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32} les droites de F qui correspondent aux domaines des points $O_1, O_2, \ldots, O_6$.

La droite a_1 ne peut rencontrer trois des droites $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{32}$, car les points correspondants appartiendraient à a_1' et les cubiques Γ_3 passant par O_7 seraient dégénérées. Il en résulte que a_1 s'appuie sur a_{11}, a_{12}, a_2 sur a_{21}, a_{22}, a_3 sur a_{31}, a_{32}.

Désignons par A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32} les points O_1, O_2, ..., O_6 correspondant aux droites a_{11}, a_{12}, ..., a_{32}. Les points A_{11}, A_{12} appartiennent à a'_1, les points A_{21}, A_{22} à a'_2 et les points A_{31}, A_{32} à a'_3.

Considérons le plan passant par a_1 et a_{11} ; il coupe encore F suivant une droite b_{11} et T′ échange entre elles les droites a_{11}, b_{11}. A la droite b_{11} correspond dans σ une conique β_{11} passant par les points A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, car la droite b_{11} s'appuie sur les droites a_{11}, a_{21}, a_{32}, a_{31}, a_{32}. Dans la transformation T, la conique β_{11} correspond aux points infiniment voisins de A_{11}.

On démontre de même qu'aux points infiniment voisins de A_{12} correspondent les points de la conique β_{12} passant par les points A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, ..., et qu'aux points infiniment voisins de A_{32} correspondent les points de la conique β_{32} passant par les points A_{32}, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}.

A une droite du plan σ, T fait correspondre une courbe du huitième ordre passant trois fois par les points A_{11}, A_{12}, ..., A_{32}, O_7 et comprenant comme parties fixes les droites a'_1, a'_2, a'_3. Cette courbe est complétée par une courbe du cinquième ordre Γ_5, passant deux fois par les points A_{11}, A_{12}, ..., A_{32}, mais ne passant plus par le point O_7. Les courbes Γ_5 forment le réseau komaloïdal de la transformation T.

D'ailleurs, à une droite du plan σ correspond sur F une cubique gauche K ne rencontrant pas les droites a_{11}, a_{12}, ..., a_{32}. Le cône projetant K de O coupe encore F suivant les trois droites a_1, a_2, a_3 et suivant une cubique gauche K′ s'appuyant en deux points sur chacune des droites a_{11}, a_{12}, ..., a_{32}, à laquelle correspond une courbe Γ_5.

Les considérations précédentes interviennent dans la démonstration du théorème de Bertini sur la réduction des transformations birationnelles involutives du plan [1], mais dans cette démonstration, on se borne généralement à dire que la transformation T engendre une involution de Geiser.

[1] *Géométrie Algébrique*, loc. cit., pp. 173-175.