Structure des points de diramation d'une surface multiple d'ordre 29

Dans des travaux récents [1], nous avons indiqué une méthode permettant de déterminer la structure des points de diramation isolés des surfaces multiples. Il nous a paru utile d'appliquer cette méthode dans un cas particulier déterminé, de manière à en montrer le maniement. C'est l'objet de ce travail, où nous déterminons la structure de tous les points de diramation isolés qui peuvent exister sur une surface multiple d'ordre 29.

Rappelons quelques résultats. Soit I une involution cyclique d'ordre premier impair p, appartenant à une surface algébrique F et soit T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution I. Supposons que cette involution ne possède qu'un nombre fini de points unis et soit A un de ceux-ci. Selon que la transformation T détermine dans le domaine du premier ordre de A, sur F, l'identité ou une homographie de période p, nous disons que le point A est uni de première ou de seconde espèce.

Supposons que A soit un point uni de seconde espèce. Il est alors le pied d'une sorte d'arbre dont chaque nœud est un point uni de l'involution. D'une manière précise, au point A sont infiniment voisins deux points unis de l'involution ; à chacun de ceux-ci sont infiniment voisins deux points unis de l'involution, et ainsi de suite. Convenons de dire que ces points unis impropres sont de première ou de seconde espèce suivant que T détermine ou non l'identité dans leurs domaines du premier

[1] *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210) ; *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840) ; *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Annali di Matematica, sous-presse), Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scientifiques, N° 270 ; Paris, Hermann, 1935).

ordre. Un certain nombre de branches se terminent par des points unis de première espèce.

Considérons un système linéaire $|C_0|$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I, et soit Φ une surface, que nous pouvons supposer normale, image de l'involution, dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0.

Si nous posons $p = 2\nu + 1$, il existe, dans $|C_0|$, $\nu + 1$ systèmes linéaires partiels $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., $|C_0^{(\nu+1)}|$, ayant A pour points-base et satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Les dimensions des systèmes $|C_0|$, $|C_0'|$, ... vont en diminuant d'une unité ;

2) Les multiplicités de A pour les courbes C_0', C_0'', ... vont en croissant et le dernier système $|C_0^{(\nu+1)}|$ a le point A pour point-base multiple d'ordre p, à tangentes variables.

Les courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu)}$ passent par les deux points unis de l'involution infiniment voisins de A, dans le domaine du premier ordre de ce point. Sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine d'au moins deux branches (linéaires ou superlinéaires), qui épousent différentes branches de l'arbre des points unis, branches qui se terminent toutes par un point uni de première espèce.

Sur les courbes C_0', le point A est l'origine d'au moins deux branches linéaires, épousant deux branches de l'arbre des points unis, que nous appellerons branches principales. La somme des multiplicités des points de chacune de ces branches pour chacune des courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu)}$ (le point A compris) est égale à p.

Au point uni A correspond sur la surface Φ un point de diramation A' équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles qui constitue la structure du point A' et qu'il s'agit de déterminer.

Nous ne considérons ici que les points unis de seconde espèce. Si A est un point uni de première espèce, le point A' est multiple d'ordre p pour la surface Φ et est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel $-p$.

Liége, le 13 décembre 1949.

1. Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique I, d'ordre 29, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I.

Nous pouvons prendre, comme modèle projectif de F, une surface normale dans un espace S_r à r dimensions, sur laquelle T est déterminée par une homographie ayant 29 axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{28}$ dont le premier seul rencontre F en un nombre fini de points : les points unis de l'involution I.

En projetant F sur σ_0 à partir de l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{28}$, on obtient une surface Φ, normale, image de l'involution I. Si Φ est d'ordre n, F est d'ordre $29n$.

Fixons l'attention sur un point uni A de I et supposons que dans le domaine du premier ordre de ce point, T détermine l'homographie

$$\lambda' : \mu' = \epsilon\lambda : \epsilon^{a}\mu, \tag{1}$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 29 de l'unité et α un entier compris entre 1 et 29 ($1 < \alpha < 29$).

Nous désignerons par C les sections hyperplanes de F, par C_0 celles de ces sections qui sont découpées par les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{28}$, par $C_0', C_0'', \ldots, C_0^{(14)}$ les courbes C_0 ayant en A des multiplicités croissantes, par $C_0^{(15)}$ les courbes C_0 ayant en A un point multiple d'ordre 29 à tangentes variables.

En A, il existe deux tangentes a_1, a_α à F unies pour T. Les courbes C_0' sont les courbes C_0 passant par A ; elles y ont comme tangentes a_1, a_α ; les courbes C_0'' sont les courbes C_0' touchant en A une direction distincte de a_1, a_α, et ainsi de suite.

Aux courbes $C_0, C_0', C_0'', \ldots$ correspondent sur Φ des courbes $\Gamma_0, \Gamma_0', \Gamma_0'', \ldots$. Les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de Φ. Si elles ont le genre π, les courbes C_0 et C ont le genre $29\pi - 28$.

Sur la surface Φ, il correspond à A un point de diramation qui occupe dans l'espace la même position que A et que nous désignerons par A', pour éviter toute confusion.

2. Si nous posons $\eta = \epsilon^{\alpha}$, l'homographie (1) peut être représentée par

$$\lambda' : \mu' = \eta^{\beta}\lambda : \eta\mu,$$

β étant un entier compris entre 1 et 29, tel que

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad \text{(mod. 29)}$$

Nous dirons que α, β sont les indices du point uni A. Naturellement, il sera inutile de considérer le point uni d'indices $\alpha' = \beta$, $\beta' = \alpha$; sa structure et celle du point de diramation correspondant sont évidemment les mêmes que celles du point d'indice α, β.

Cela étant, les indices α, β des points unis possibles de l'involution I sont :

$$\begin{array}{llllllllll}
\alpha = 2, & 3, & 4, & 5, & 7, & 8, & 9, & 12, & 14, & 16, \\
\beta = 15, & 10, & 22, & 6, & 25, & 11, & 13, & 17, & 27, & 20, \\
\alpha = 18, & 19, & 23, & 28, \\
\beta = 21, & 26, & 24, & 28.
\end{array}$$

Pour chaque couple de valeurs de α, β, nous devrons rechercher les valeurs de λ, μ satisfaisant à la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \text{(mod. 29)}$$

et par conséquent à la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad \text{(mod. 29)}$$

λ et μ sont des entiers positifs que nous rangerons dans l'ordre des $\lambda + \mu$ croissants et nous supposerons $\lambda + \mu < p$. Nous désignerons ces couples de valeurs par

$$\lambda_1, \mu_1 ; \quad \lambda_2, \mu_2 ; \quad \dots ; \quad \lambda_{14}, \mu_{14}.$$

Rappelons que les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A : λ_i tangentes confondues avec a_1 et μ_i avec a_α.

Nous aurons à considérer deux suites de points infiniment voisins successifs de A. L'une, dont les points seront désignés par (1, 1), (1, 2), ..., (1, $\beta - 1$), comprend $\beta - 1$ points dont le premier est sur a_1. L'autre comprend $\alpha - 1$ points dont le premier appartient à a_α ; ces points seront désignés par (α, 1), (α, 2), ..., (α, $\alpha - 1$).

Nous aurons aussi à considérer des suites de points infiniment voisins successifs de l'un des précédents. Une telle suite, ayant origine (1, 5) par exemple, sera désignée par (1, 5, 1), (1, 5, 2), ... De même une suite de points infiniment voisins successifs du point (α, 6, 4) par exemple, sera désignée par (α, 6, 4, 1), (α, 6, 4, 2), ... Et ainsi de suite.

3. Commençons par considérer le cas $\alpha = 2$, $\beta = 15$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 2\mu \equiv 0, \qquad \mu + 15\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 14\,; \quad \lambda_2 = 3, \mu_2 = 13\,; \quad \ldots; \quad \lambda_{14} = 27, \mu_{14} = 1.$$

Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 15, une tangente étant confondue avec a_1 et 14 avec a_2. Ces courbes passent simplement par les 14 points (1, 1), (1, 2), ..., (1, 14) et 14 fois par le point (2, 1).

On peut représenter leur comportement en A par le schéma

$$(1, 14)^1, \ (1, 13)^1, \ \ldots, \ (1, 1)^1, \ A^{15}, \ (2, 1)^{14}.$$

Aux points $(1, 14)^1$ et $(2, 1)^{14}$, qui sont unis de première espèce pour l'involution, correspondent sur la surface Φ_1, projection de Φ à partir de A sur un hyperplan de σ_0, une droite σ_1 et une courbe rationnelle σ_2 d'ordre 14.

Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 16, trois tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 13 avec a_2. Ces courbes passent 13 fois par le point (2, 1). Elles passent d'autre part trois fois par les points (1, 1), (2, 2), (1, 3), (1, 4), une fois par le point (1, 5) et une fois par les points (1, 5, 1), (1, 5, 2). Nous représenterons leur comportement en A par la notation

$$(1, 5)^1, \ (1, 4)^3, \ \ldots, \ (1, 1)^3, \ A^{16}, \ (2, 1)^{13}.$$
$$(1, 5, 1)^1$$
$$(1, 5, 2)^1.$$

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0'' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_1', commun à la droite σ_1 et à la courbe σ_2.

Le système $|\Gamma_0'|$ a le degré $n - 15$, car le point A absorbe 15×29 points d'intersection de deux courbes C_0' et d'ailleurs, A′ est multiple d'ordre 15 pour la surface Φ. On trouve de même que le système $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - 16$ et par conséquent le point A_1' est simple pour la surface Φ_1. Le point A′ est équivalent à l'ensemble de la droite σ_1 et de la courbe σ_2. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \sigma_2 ,$$

donc σ_1 et σ_2 ont respectivement les degrés -2 et -15.

Un point de diramation d'indices (2,15) *est multiple d'ordre* 15 *pour la surface* Φ ; *il est équivalent à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degrés* -2, -15 *se coupant en un point* (1).

4. Supposons $\alpha = 3$, $\beta = 10$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 3\mu \equiv 0, \quad \mu + 10\lambda = 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 9 \ ; \ \lambda_2 = 5,\ \mu_2 = 8 \ ; \ \dots \ ; \ \lambda_5 = 14,\ \mu_5 = 5 \ ; \ \lambda_6 = 1,$$
$$\mu_6 = 19 \ ; \ \lambda_7 = 17,\ \mu_7 = 4 \ ; \ \dots \ ; \ \lambda_{14} = 13,\ \mu_{14} = 15.$$

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 11 ; elles ont en ce point deux tangentes confondues avec a_1 et neuf avec a_3. Elles passent 2 fois par les points (1, 1), (1, 2), ..., (1, 9) et 9 fois par les points (3, 1) et (3, 2).

Aux domaines des points (1, 9), (3, 2), qui sont des points unis de première espèces pour l'involution, correspondent sur la surface Φ_1 respectivement une conique σ_1 et une courbe rationnelle du neuvième ordre σ_3. Le système linéaire $|\Gamma_0'|$ a le degré $n - 11$.

Les courbes C_0' sont représentées par le schéma

$$(1, 9)^2,\ (1, 8)^2,\ \dots,\ (1, 1)^2,\ A^{11},\ (3, 1)^9,\ (3, 2)^9.$$

Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 13 et 5 tangentes confondues avec a_1, 8 avec a_3. Ces courbes passent 8 fois par chacun des points (3, 1), (3, 2), 5 fois par (1, 1), 4 fois par (1, 2), une fois par (1, 3), (1, 4), ..., (1, 9) et une fois par les points (1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2). Ce dernier point est uni de première espèce pour l'involution.

(1) Voir nos mémoires *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1938, pp. 193-322) ; *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1930, pp. 450-467).

Les courbes C_0'' sont représentées par le schéma

$$(1, 9)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^4, (1, 1)^5, A^{13}, (3, 1)^8, (3, 2)^8.$$
$$(1, 2, 1)^1, (1, 2, 1, 1)^1, (1, 2, 1, 2)^1.$$

Le système $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - 12$ et par conséquent, les hyperplans découpant sur Φ_1 les courbes Γ_0'' passent par un point A_1', simple pour la surface Φ_1, commun aux courbes σ_1, σ_3. On a donc

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \sigma_3,$$

et les courbes σ_1, σ_3 ont respectivement les degrés -3, -10.

Un point de diramation d'indices (3, 10) *est multiple d'ordre onze pour la surface* Φ ; *il est équivalent à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degrés* -3, -10, *ayant un point commun.*

5. Supposons $\alpha = 4$, $\beta = 22$. Les congruences

$$\lambda + 4\mu \equiv 0, \quad \mu + 22\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

ont pour solutions

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 7\,;\ \lambda_2 = 5, \mu_2 = 6\,;\ \lambda_3 = 9, \mu_3 = 5\,;\ \lambda_4 = 2, \mu_4 = 14\,;$$
$$\lambda_5 = 13, \mu_5 = 4\,;\ \lambda_6 = 6, \mu_6 = 13\,;\ \ldots\,;\ \lambda_{14} = 18, \mu_{14} = 10.$$

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 8, une tangente étant confondue avec a_1 et les sept autres avec a_4.

Ces courbes ont pour schéma

$$(1, 21)^1, (1, 20)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^8, (4, 1)^7, (4, 2)^7, (4, 3)^7.$$

Les points (1, 21) et (4, 3) sonr unis de première espèce pour l'involution et il leur correspond, sur Φ_1, une droite σ_1 et une courbe rationnelle du septième ordre σ_4. Le système $|\Gamma_0'|$ a le degré $n - 8$.

Les courbes C_0'' ont la multiplicité 11 en A et par conséquent, elles ne peuvent plus passer par le point (1, 21) et doivent passer 6 fois par le point (4, 3). Il en résulte que sur Φ_1, les courbes Γ_0'' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_1' commun aux courbes σ_1, σ_4.

Les courbes C_0'' passent nécessairement 6 fois par chacun des points (4, 1), (4, 2) et (4, 3), puisque la somme de leurs multiplicités en ces points et au point A doit être égale à 29.

Si le point A'_1 est simple pour Φ_1, $|\Gamma''_0|$ a le degré $n - 9$ et sur une courbe C''_0, le point A est l'origine d'une seule branche (superlinéaire) tangente à a_1. Si les courbes C''_0 passent 5 fois par les x premiers des points (1, 1), (1, 2), ... et y fois par le suivant, on doit avoir

$$11 + 5x + y = 29,$$

d'où $x = 3$, $y = 3$. Les courbes C''_0 passent alors deux fois par le point (1, 4, 1) et une fois par les points (1, 4, 1, 1), (1, 4, 1, 2). Mais alors, $|\Gamma''_0|$ a le degré $n - 11$, ce qui est impossible. Donc le point A'_1 est double pour la surface Φ_1.

Projetons la surface Φ_1 du point A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_2 la surface obtenue. Au point A'_1, nécessairement double pour Φ_1, correspond une conique ρ éventuellement dégénérée en deux droites. A la droite σ_1 correspond un point de ρ, multiple pour Φ_2, et à la courbe σ_4 correspond une courbe du sixième ordre que nous continuerons encore à désigner par σ_4. Cette courbe rencontre la conique ρ en un point A'_2.

Les courbes C'''_0 ont la multiplicité 14 en A, neuf tangentes confondues avec a_1 et cinq avec a_4. Ces courbes doivent nécessairement passer cinq fois par les points (4, 1), (4, 2), (4, 3), donc, sur Φ_2, les courbes Γ'''_0 sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_2.

Le point A'_2 doit être simple pour Φ_2, car s'il était double la conique ρ serait dégénérée en deux droites et A'_2 serait le point commun à ces deux droites ; il ne se trouverait donc pas sur la sextique σ_4.

Projetons la surface Φ_2 de A'_2 sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_3 d'ordre $n - 11$ car Φ_2 est d'ordre $n - 10$. A la conique ρ de Φ_2 correspond sur Φ_3 une droite que nous désignerons encore par ρ ; à la sextique σ_4 correspond une quintique σ_4 et au point A'_2 une droite a'_2 qui rencontre d'une part la droite ρ et d'autre part la quintique σ_4 en un point A'_3.

Les courbes $C^{(4)}_0$ passent 16 fois par A, deux tangentes étant confondues avec a_1 et 14 avec a_4. Elles ne peuvent passer que quatre fois par le point (4, 3) et par conséquent les courbes $\Gamma^{(4)}_0$ sont découpées sur Φ_3 par les hyperplans passant par le point A'_3.

Les courbes $C^{(4)}_0$ ont pour schéma

$$\begin{array}{ll} (1,7)^1, (1,6)^2, \ldots, (1,1)^2, A^{16}, & (4,1)^5, (4,1)^4, (4,3)^4 \\ (1,7,1)^1 & (4,1,1)^1, \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & (4,1,9)^1. \end{array}$$

On en conclut que le système $|\Gamma_0^{(4)}|$ a le degré $n-12$. Le point A_3' est donc simple pour Φ_3.

Au domaine du point A_3' sur Φ_3 correspond sur F soit le domaine du point (4, 1, 9), soit le domaine du point (1, 7, 1). Dans cette dernière hypothèse, le domaine du point (4, 1, 9) représente la droite ρ. Mais alors, les courbes C_0''' passeraient par le point (4, 1, 9), ce qui est impossible. Donc au point A_3' correspond le point (4, 1, 9) et à la droite ρ, le point (1, 7, 1).

Dans ces conditions, les courbes C_0''' passent simplement par le point (1, 7, 1) et on voit aisément que ces courbes ont le schéma

$$\begin{array}{ll} (1,7)^1, (1,6)^2, \ldots, (1,2)^2, & (1,1)^4, A^{14}, (4,1)^5, (4,2)^5, (4,3)^5 \\ (1,7,1)^1 & (1,1,1)^2 \\ & (1,1,2)^2 \\ & (1,1,3)^1, (1,1,3,1)^1. \end{array}$$

Partant de ce schéma, on vérifie aisément que $|\Gamma_0'''|$ a bien le degré $n-11$.

Le domaine du point (1, 1, 3, 1) représente nécessairement la droite a_2' de Φ_3, c'est-à-dire le domaine du point A_2' sur Φ_2.

Les courbes C_0'' ne peuvent passer par le point (1, 1, 3, 1). Si le point A_1' est double conique pour Φ_1, c'est-à-dire si ρ est une conique irréductible sur Φ_2, les courbes C_0'' passent deux fois par (1, 7, 6). Mais alors le point (1, 7) est double et les points (1, 6), (1, 5), ..., (1, 1) sont quadruples pour ces courbes. Cela est impossible, car la somme des multiplicités des courbes C_0'' en A et aux sept derniers points ne peut excéder 29.

Le point A_1' est donc double biplanaire et sur Φ_2, la conique ρ se scinde en deux droites ρ_1, ρ_2.

Les courbes C_0'' ont le schéma

$$(1, 7)^1, (1, 6)^2, \ldots, (1, 3)^2, (1, 2)^4, (1, 1)^5, A^{11}, (4, 1)^6, (4, 2)^6, (4, 3)^6,$$
$$(1, 7, 1)^1, \qquad (1, 2, 1)^1, (1, 2, 1, 1)^1.$$

Au domaine du point (1, 7, 1) correspond sur Φ_2 la droite ρ_1, qui s'appuie sur σ_1 et au domaine du point (1, 2, 1, 1) la droite ρ_2, qui s'appuie sur ρ_1 et sur σ_4. Le système $| \Gamma_0'' |$ est bien de degré $n - 10$.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_4$$

et les courbes σ_1, ρ_1, ρ_2, σ_4 ont respectivement pour degrés virtuels -2, -2, -2 et -8.

Un point de diramation d'indices (4, 22) *est multiple d'ordre huit pour la surface* Φ ; *il est équivalent à l'ensemble de quatre courbes rationnelles de degrés* -2, -2, -2, -8. *Il possède, dans son domaine du premier ordre, un point double biplanaire ordinaire.*

6. Passons au cas où nous avons $\alpha = 5$, $\beta = 6$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 5\mu \equiv 0, \quad \mu + 6\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 4, \mu_1 = 5 ; \quad \lambda_2 = 9, \mu_2 = 4 ; \quad \lambda_3 = 3, \mu_3 = 11 ;$$
$$\lambda_4 = 14, \mu_4 = 3 ; \quad \ldots .$$

Les courbes C_0' ont la multiplicité 9 en A, quatre tangentes confondues avec a_1 et cinq avec a_5. Elles ont pour schéma

$$(1, 5)^4, (1, 5)^4, \ldots, (1, 1)^4, A^9, (5, 1)^5, \ldots, (5, 4)^5.$$

Aux points (1, 5) et (5, 4) correspondent respectivement sur Φ_1 deux courbes rationnelles σ_1 du quatrième ordre et σ_5, du cinquième ordre

Les courbes C_0'' ont la multiplicité 13 en A, neuf tangentes confondues avec a_1 et quatre avec a_5. Leur schéma est

$$(1, 5)^3, \ldots, (1, 2)^3, (1, 1)^4, A^{13}, (5, 1)^4, \ldots, (5, 4)^4.$$
$$(1, 1, 1)^1$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(1, 1, 5)^1.$$

Les courbes Γ_0'' sont donc découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A_1' commun aux courbes σ_1, σ_5. Au domaine de ce point correspond celui du point (1, 1, 5) et A_1' est donc simple pour Φ_1.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \sigma_5.$$

Un point de diramation d'indices (5, 6) *est multiple d'ordre neuf pour la surface* Φ ; *il est équivalent à deux courbes rationnelles de degrés virtuels respectifs* — 5, — 6.

7. Supposons $\alpha = 7$, $\beta = 25$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 7\mu \equiv 0, \quad \mu + 25\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 4 ; \lambda_2 = 2, \mu_2 = 8 ; \lambda_3 = 8, \mu_3 = 3 ; \lambda_4 = 3, \mu_4 = 12 ;$$
$$\lambda_3 = 9, \mu_5 = 7 ; \ \ldots$$

Les courbes C_0' ont le schéma

$$(1, 24)^1, (1, 23)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^5, (7, 1)^4, \ldots, (7, 6)^4.$$

Aux points (1, 24), (7, 6) correspondent respectivement, sur la surface Φ_1, une droite σ_1 et une quartique rationnelle σ_7.

Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 10, deux tangentes étant confondues avec a_1 et huit avec a_7. Ces courbes ne peuvent plus passer par $(1, 24)^1$ et ont nécessairement la multiplicité trois en (7, 6). Les courbes Γ_0'' sont donc découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1' commun à la droite σ_1 et à la quartique σ_7.

Le schéma des courbes C_0'' est

$$\begin{array}{ll} (1, 10)^1, (1, 9)^2, \ldots, (1, 1)^2, A^{10}, & (7, 1)^4, (7, 2)^3, \ldots, (7, 6)^3, \\ (1, 10, 1)^1 & (7, 1, 1)^1 \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & (7, 1, 4)^1. \end{array}$$

Le point A_1' est donc double biplanaire pour la surface Φ_1. Projetons celle-ci de A_1' sur un hyperplan ; nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle aux points (1, 10, 1) et (7, 1, 4) corresgentes confondues avec a_1 et sept avec a_8. Elles passent nécessairement deux fois par les points (1, 10) et (8, 7). On en conclut que sur la surface Φ_1, les courbes Γ_2'' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_1' appartenant à la dıoite τ_1 et à la cubique gauche σ_8.

Les courbes C_0'' ont pour schéma

$$(1, 10)^2, (1, 9)^2, \ldots, (1, 1)^2, A^9, (8, 1)^7, (8, 2)^3, (8, 3)^2, \ldots, (8, 7)^2$$
$$(8, 2, 1)^1,$$
$$(8, 2, 2)^1,$$
$$(8, 2, 3)^1,$$
$$(8, 2, 4)^1.$$

La suıface Φ_2 a l'ordre $n - 6$ et le système $|\Gamma_0''|$ le degré $n - 7$. Le point A_1' est donc simple pour la surface Φ_2.

Les courbes σ_1, τ_1 et σ_8 ont respectivement les degrés virtuels -3, -3, -4 et on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_1' + \sigma_1 + \tau_1 + \sigma_8.$$

Un point de diramation d'indices (8, 11) *est multiple d'ordre six pour la surface* Φ ; *il est équivalent à trois courbes rationnelles, deux de degrés virtuel* -3, *l'autre de degré virtuel* -4.

9. Envisageons maintenant le cas $\alpha = 9$, $\beta = 13$. Les solutions dεs congruences

$$\lambda + 9\mu \equiv 0, \quad \mu + 13\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 2, \mu_1 = 3 \; ; \lambda_2 = 4, \mu_2 = 6 \; ; \lambda_3 = 11, \mu_3 = 2 \; ; \lambda_4 = 6,$$
$$\mu_4 = 9 \; ; \lambda_5 = 13, \mu_5 = 5 \; ; \ldots.$$

Les courbes C_0' ont pour schéma

$$(1, 12)^2, \; (1, 11)^2, \ldots, \; (1, 1)^2, \; A^5, \; (9, 1)^3, \; \ldots, \; (9, 8)^3.$$

Aux points unis de première espèce (1, 12) et (9, 8) correspondent sur la surface Φ_1 une conique σ_1 et une cubique gauche σ_9. La surface Φ_1 est d'ordre $n - 5$.

Les courbes C_0'' passent dix fois par A et ont en ce point quatre tangentes confondues avec a_1 et six avec a_9. Elles ne peuvent donc passer qu'une fois par le point (1, 12) et deux fois par le point

(9, 8). Les courbes Γ_0'' sont donc découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1' commun aux courbes σ_1 et σ_9. Les courbes C_0'' ont pour schéma

$$
\begin{array}{llll}
(1,12)^1, \ldots, (1,4)^1, & (1,3)^2, (1,2)^4, (1,1)^4, A^{10}, & (9,1)^5, (9,2)^2, \ldots, (9,8)^2. \\
& (1,3,1)^1, & (9,1,1)^1, (9,1,1,1)^1, \\
& & (9,1,1,2)^1. \\
& (1,3,2)^1. &
\end{array}
$$

Le point A_1' est double biplanaire pour la surface Φ_1. En projetant cette surface de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_2, d'ordre $n - 7$. Sur cette surface, à la conique σ_1 correspond une droite σ_1, à la cubique σ_9 correspond une conique σ_9. Aux domaines des points (1, 3, 2), (9, 1, 1, 2) correspondent respectivement des droites ρ_1, ρ_2 se coupant en un point A_2'. La droite ρ_1 s'appuie sur σ_1 et la droite ρ_2 sur la conique σ_9.

Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité 13, onze tangentes étant confondues avec a_1 et deux avec a_9. Il en résulte que ces courbes passent deux fois par les points (9, 1), ..., (9, 8) et que par conséquent, elles ne passent plus par (9, 1, 1, 2). Elles ne peuvent plus passer par le point (1, 3, 2) et par conséquent, sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A_2', commun aux droites ρ_1, ρ_2.

Le schéma des courbes C_0'''' est

$$
\begin{array}{lll}
(1,12)^1, \ldots, (1,2)^1, & (1,1)^5, A^{13}, (9,1)^2, \ldots, (9,8)^2, \\
& (1,1,1)^4, \\
& (1,1,2)^2, (1,1,2,1)^2.
\end{array}
$$

On en conclut que le point A' est double conique pour la surface Φ_2. En projetant cette surface sur un hyperplan à partir de A_2', on obtient une surface Φ_3, d'ordre $n - 9$. A la droite σ_1 et à la conique σ_9 de Φ_2 correspondent sur Φ_3 une droite σ_1, et une conique σ_2, aux droites ρ_1, ρ_2 correspondent des points l'un de σ_1, l'autre de σ_9, singuliers pour Φ_3. Au domaine du point (1, 1, 2, 1) correspond une conique ρ_0 passant par les points qui représentent ρ_1 et ρ_2.

On peut voir que sur la surface Φ_3, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point qui représente ρ_2. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont pour schéma

$(1, 12)^1, \ldots, (1, 2)^1, (1, 1)^3, A^{15}, (9, 1)^7, 9, 2)^1, \ldots, (9, 8)^1$
$(1, 1, 1)^2, \quad (9, 1, 1)^2, (9, 1, 1, 1)^2, (9, 1, 1, 2)^2$
$(1, 1, 2)^1,$
$(1, 1, 2, 1)^1.$

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_0 + \rho_2 + \sigma_9$$

et les degrés virtuels des courbes σ_1, ρ_1, ρ_0, ρ_2, σ_9 sont respectivement -3, -2, -2, -2, -4. On a en outre

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_0 + \rho_2) + \sigma_9,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + 2\rho_1 + 3\rho_0 + 2\rho_2 + \sigma_9,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma^{(4)}_0 + \sigma_1 + 2\rho_1 + 3(\rho_0 + \rho_2) + \sigma_9.$$

Un point de diramation d'indice (9, 13) *est multiple d'ordre cinq pour la surface* Φ, *un point double biplanaire et un point double conique lui sont infiniment voisins successifs ; il est équivalent à un ensemble de cinq courbes rationnelles de degrés* -3, -2, -2, -2, -4.

10. Supposons maintenant $\alpha = 12$, $\beta = 17$ et considérons les solutions des congruences

$$\lambda + 12\mu \equiv 0, \quad \mu + 17\lambda \equiv 0. \qquad (\text{mod. } 29)$$

On trouve

$$\lambda_1 = 5,\ \mu_1 = 2\ ;\quad \lambda_2 = 3,\ \mu_2 = 7\ ;\quad \lambda_3 = 1,\ \mu_3 = 12\ ;$$
$$\lambda_4 = 10,\ \mu_4 = 4\ ;\quad \ldots.$$

Les courbes C'_0 ont la multiplicité 7 en A, cinq tangentes confondues avec a_1 et deux avec a_{12}. Elles présentent le schéma

$$(1, 16)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^3, (1, 1)^5, A^7, (12, 1)^2, \ldots, (12, 11)^2,$$
$$(1, 2, 1)^2.$$

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points unis de première espèce (1, 11), (1, 2,1), (12, 11), respectivement une droite σ_1, une conique τ_1 et une conique σ_{12}. La surface Φ_1 est d'ordre $n - 5$.

Les courbes C''_0 ont la multiplicité 10 en A, trois tangentes confondues avec a_1 et sept avec a_{12}. Ces courbes ne peuvent plus passer qu'une fois par le point (1, 2, 1) et qu'une fois par le point (12, 11), donc les courbes Γ_0'' sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1' commun au courbes τ_1, σ_{12}.

Les courbes C_0'' ont pour schéma

$$\begin{array}{lll} (1, 16)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^2, (1, 1)^3, A^{10}, (12, 1)^7, & (12, 2)^3, (12, 3)^1, \ldots, & \\ & & (12, 11)^1, \\ (1, 2, 1)^1 & (12, 2, 1)^2, & \\ & (12, 2, 2)^2. & \end{array}$$

Le point A_1' est donc double conique pour la surface Φ_1. Si nous projetons cette surface de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_3, d'ordre $n - 7$, sur laquelle aux courbes σ_1, τ_1, σ_{12} correspondent respectivement trois droites σ_1, τ_1, σ_{12}. Au domaine du point A_1' correspond une conique ρ_0 s'appuyant sur τ_1 et σ_{12}.

Les courbes C_0''' ont pour schéma

$$\begin{array}{lll} (1, 16)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^{13}, (12, 1)^5, & (12, 2)^2, (12, 3)^1, \ldots, (12, 11)^1 & \\ (12, 1, 1)^1, & (12, 2, 1)^1, & \\ — & (12, 2, 2)^1. & \\ — & & \\ (12, 1, 7)^1, & & \end{array}$$

Sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_2' commun aux courbes τ_1, ρ_0. Ce point est simple pour la surface, car $| \Gamma_0'''' |$ a le degré $n - 8$.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ont le schéma

$$\begin{array}{ll} (1, 2)^5, (1, 1)^{10}, A^{14}, (12, 1)^4, & (12, 2)^2, (12, 3)^1, \ldots, (12, 11)^1, \\ (1, 2, 1)^5 & (12, 2, 1)^1, \\ & (12, 2, 2)^1. \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont donc découpées sur la surface Φ_2 par les hyperplans passant par la droite τ_1 de cette surface.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \rho_0 + \sigma_{12}$$

et les courbes σ_1, τ_1, ρ_0, σ_{12} ont respectivement pour degrés virtuels -2, -4, -2, -3.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + \tau_1 + 2\rho_0 + \sigma_{12},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2(\tau_1 + \rho_0) + \sigma_{12}.$$

Les courbes Γ_0'''' sont les courbes Γ_0'' passant par un point simple.

Un point de diramation d'indices (12, 17) *est, pour la surface* Φ, *un point multiple d'ordre cinq auquel est infiniment voisin un point double conique ; il est équivalent à l'ensemble de quatre courbes rationnelles de degrés virtuels* — 2, — 4, — 2, — 3.

11. Passons à l'étude du cas $\alpha = 14$, $\beta = 27$.

Les congruences

$$\lambda + 14\mu = 0, \qquad \mu + 27\lambda = 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

ont pour solutions

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 2\ ;\ \lambda_2 = 2,\ \mu_2 = 4\ ;\ \lambda_3 = 3,\ \mu_3 = 6\ ;\ \lambda_4 = 4,$$
$$\mu_4 = 8\ ;\ \lambda_5 = 5,\ \mu_5 = 10\ ;\ \lambda_6 = 15,\ \mu_6 = 1\ ;\ \lambda_7 = 6,\ \mu_7 = 12\ ;$$
$$\lambda_8 = 16,\ \mu_8 = 3\ ;\ \ldots.$$

Les courbes C_0' ont pour schéma

$$(1, 26)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^3, (14, 1)^2, \ldots, (14, 13)^2.$$

Sur la surface Φ_1, d'ordre n — 3, il correspond aux domaines des points unis de première espèce (1, 26), (14, 13) respectivement une droite σ_1 et une conique σ_{14}.

Les courbes C_0'' ont pour schéma

$$(1, 12)^1, (1, 11)^2, \ldots, (1, 1)^2, A^6, (14, 1)^4, \ldots, (14, 3)^4, (14, 4)^2, (14, 5)^1, \ldots, (14, 13)^1,$$
$$(1, 12, 1)^1. \qquad (14, 4, 1)^1,$$
$$(14, 4, 2)^1.$$

Les courbes σ_1, σ_{14} ont donc en commun un point A_1' double biplanaire pour la surface Φ_1. En projetant cette surface de ce point sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_2, d'ordre n — 5, sur laquelle aux domaines des points (1, 12, 1) et (14, 4, 2) correspondent respectivement des droites ρ_{11}, ρ_{21}, de degré virtuel — 2. A la droite π_1 correspond un point de ρ_{11} et à la conique σ_{14}, une droite rencontrant ρ_{21} en un point. Les droites ρ_{11}, ρ_{21} ont en commun un point A_2'.

Les courbes C_0''' ont pour schéma

$$\begin{array}{ll}
(1,7)^2, (1,6)^3, \ldots, (1,1)^3, A^9, & (14,1)^6, (14,2)^3, (14,3)^1, \ldots, (14,13)^1 \\
(1, 7, 1)^1, & (14, 2, 1)^2 \\
(1, 7, 1, 1,)^1. & (14, 2, 2)^1, (14, 2, 2, 1)^1.
\end{array}$$

Le point A_2' est double biplanaire pour Φ_2. Soit Φ_3 la surface obtenue en projetant Φ_2 de A_2' sur un hyperplan. Aux domaines des points unis de première espèce (1, 7, 1, 1) et (14, 2, 2, 1) correspondent respectivement sur Φ_3 des droites ρ_{12}, ρ_{22}, de degré virtuel -2, se coupant en un point A_3'. Aux droites ρ_{11}, ρ_{21} correspondent respectivement des points l'un sur ρ_{12}, l'autre sur ρ_{22} et σ_{14}. Le point qui représente ρ_{11} représente également σ_1. Φ_3 est d'ordre $n - 7$.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ont pour schéma

$$\begin{array}{lll}
(1, 5)^1, (1, 4)^4, \ldots, (1, 1)^4, A^{12}, & (14, 1)^5, & (14, 2)^1, \ldots, (14, 13)^1 \\
(1, 5, 1)^1, & (14, 1, 1)^3, & (14, 1, 1, 1)^1, \\
(1, 5, 2)^1, & & (14, 1, 1, 1, 1)^1, \\
(1, 5, 3)^1. & & (14, 1, 1, 1, 2)^1.
\end{array}$$

Le point A_3' est double biplanaire pour la surface Φ_3. En projetant Φ_3 de A_3' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_4 d'ordre $n - 9$. Aux points (1, 5, 3), (14, 1, 1, 1, 2) correspondent respectivement sur Φ_4 des droites ρ_{13}, ρ_{23} se coupant en un point A_4'. Sur ρ_{13} se trouve un point qui représente à la fois les trois droites σ_1, ρ_{11}, ρ_{12} et sur ρ_{23}, un point qui représente à la fois ρ_{21}, ρ_{22} et par lequel passe la droite σ_{14}.

Les courbes $C_0^{(5)}$ ont pour schéma

$$(1, 3)^4, (1, 2)^5, (1, 1)^5, A^{15}, (14, 1)^2, (14, 2)^1, \ldots (14, 13)^1,$$
$$(1, 3, 1)^1, (1, 3, 1, 1)^1, \ldots, (1, 3, 1, 3)^1, (14, 1, 1)^1, \ldots, (14, 1, 8)^1.$$

Le point A_4' est donc également double biplanaire pour la surface Φ_4. Soit Φ_5 la projection de cette surface à partir de A_4' sur un hyperplan. Aux points (1, 3, 1, 3) et (14, 1, 8) correspondent sur Φ_5, d'ordre $n - 11$, deux droites ρ_{14}, ρ_{24}, de degré virtuel -2, se coupant en un point A_5'. Sur ρ_{14}, il existe un point qui représente les droites σ_1, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{13} et sur ρ_{24}, un point qui représente les droites ρ_{21}, ρ_{22}, ρ_{23} et qui est situé sur la droite σ_{14}.

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent 10 fois par A, 15 tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_{14}. Il en résulte que ces courbes passent simplement par les points (14, 1), (14, 2), ..., (14, 13). Ces courbes ne passent donc plus par le point (14, 1, 8). Si les courbes $C_0^{(6)}$ passaient encore par le point (1, 3, 1, 3), la somme de leurs multiplicités en A, (1, 1), (1, 2), (1, 3) serait supérieure à 29, ce qui est impossible. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées sur Φ_5 par les hyperplans passant par A_5'.

Si ce point était simple ou double conique pour Φ_5, il y aurait une seule suite de points unis pour l'involution, comprenant le point (1, 1), suite se terminant par un point simple ou double. On trouve effectivement la suite

$$(1, 1)^{13}, (1,1,1)^2, (1,1,1,1)^2, \ldots, (1,1,1,5)^2, (1,1,1,6)^1, (1,1,1,6,1)^1.$$

Mais alors, le degré du système $|\Gamma_0^{(6)}|$ serait $n - 10$, ce qui est absurde.

Le point A_5' est donc biplanaire pour la surface Φ_5.

Cela étant, on trouve que les courbes $C_0^{(6)}$ ont pour schéma

$$\begin{array}{lll}
(1, 2)^5, & (1, 1)^8, & A^{16}, (14, 1)^1, \ldots, (14, 13)^1. \\
(1, 2, 1)^1, & (1, 1, 1)^2, & \\
(1, 2, 1, 1)^1, & (1, 1, 2)^2, & \\
\quad — & (1, 1, 3)^2, & \\
(1, 2, 1, 4)^1, & (1, 1, 4)^1, & (1, 1, 4, 1)^1.
\end{array}$$

En projetant Φ_5 de A_5' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_6 d'ordre $n - 13$. Aux points (1, 2, 1, 4), (1, 1, 4, 1) correspondent des droites ρ_{15}, ρ_{25}, se coupant en un point et de degré virtuel -2.

Sur la droite ρ_{15} se trouve un point qui représente les droites σ_1, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{14} et sur la droite ρ_{25}, un point qui représente les droites ρ_{21}, ρ_{22}, ρ_{23}, ρ_{24}.

Les courbes $C_0^{(7)}$ ont la multiplicité 18 en A, 6 tangentes étant confondues avec a_1 et 12 avec a_{14}. Ces courbes ne peuvent donc plus passer par le point (14, 13) ni par le point (1, 1, 4, 1). Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées sur Φ_6 par les hyperplans passant par le point A_6', commun aux droites ρ_{25}, σ_{14}, point qui représente les droites ρ_{21}, ρ_{22}, ρ_{23}, ρ_{24}.

On a

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &\equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \rho_{11} + \rho_{12} + \dots + \rho_{15} + \rho_{25} + \dots + \rho_{21} + \sigma_{14},\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + 2(\rho_{11} + \dots + \rho_{15} + \rho_{25} + \dots + \rho_{21}) + \sigma_{14},\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + 2\rho_{11} + 3(\rho_{12} + \dots + \rho_{22}) + 2\rho_{21} + \sigma_{14},\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\rho_{11} + 3\rho_{12} + 4(\rho_{13} + \dots + \rho_{23}) + 3\rho_{22}\\
&\qquad + 2\rho_{21} + \sigma_{14},\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_1 + 2\rho_{11} + 3\rho_{12} + 4\rho_{13} + 5(\rho_{14} + \dots + \rho_{24})\\
&\qquad + 4\rho_{23} + 3\rho_{22} + 2\rho_{21} + \sigma_{14},\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(6)} + \sigma_1 + 2\rho_{11} + 3\rho_{12} + 4\rho_{13} + 5\rho_{14} + 6(\rho_{15} + \rho_{25})\\
&\qquad + 5\rho_{24} + 4\rho_{23} + 3\rho_{22} + 2\rho_{21} + \sigma_{14}.
\end{aligned}$$

Les courbes σ_1, σ_{14} ont les degrés virtuels respectifs -2, -3. D'après ce qu'on vient d'établir, on a

$$\Gamma_0^{(6)} \equiv \Gamma_0^{(7)} + \rho_{24} + \rho_{23} + \rho_{22} + \rho_{21}.$$

Il en résulte que les courbes $C_0^{(7)}$ ont pour schéma

$$\begin{array}{lll}
(1, 2)^5, (1, 1)^6, A^{18}, & (14, 1)^4, (14, 2)^3, (14, 3)^3, & (14, 4)^1,\\
(1, 2, 1)^1 & (14, 1, 1)^1, & (14, 4\ 1)^1,\\
(1, 2, 1, 1)^1, \dots & \dots & (14, 4, 2)^1.\\
(1, 2, 1, 4)^1 & (14, 1, 8)^1. &
\end{array}$$

En effet, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ rencontrent en un point les droites ρ_{21}, ρ_{24}, mais ne rencontrent pas les droites ρ_{22}, ρ_{23}.

En un point de diramation d'indices (14, 27), *la surface* Φ *a un point multiple d'ordre trois, auquel sont infiniment voisins successifs cinq points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire ; ce point est équivalent à un ensemble de douze courbes rationnelles dont l'une a le degré virtuel* -3 *et les autres le degré virtuel* -2.

12. Envisageons le cas $\alpha = 16$, $\beta = 20$.

Les solutions des congruences

$$\lambda + 16\mu \equiv 0, \qquad \mu + 20\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 9 ; \lambda_2 = 4, \mu_2 = 7 ; \lambda_3 = 7, \mu_3 = 5 ; \lambda_4 = 10,$$
$$\mu_4 = 3 ; \lambda_5 = 13, \mu_5 = 1 ; \dots .$$

Le schéma des courbes C' est

$$(1, 19)^1, \dots, (1, 1)^1, A^{10}, (16, 1)^5, (16, 2)^1, \dots, (16, 15)^1,$$
$$(16, 1, 1)^4.$$

Sur la surface Φ_1 d'ordre $n - 6$, il correspond aux points unis de première espèce (1, 19), (16, 1, 1), (16, 15) respectivement une droite σ_1, une courbe rationnelle du quatrième ordre τ_{16} et une droite σ_{16}.

Les courbes C_0'' ont pour schéma

$$\begin{array}{ll} (1, 5)^2, (1, 4)^4, \dots, (1, 1)^4, A^{11}, & (16, 1)^4, (16, 2)^1, \dots, (16, 15)^1, \\ (1, 5, 1)^2 & (16, 1, 1)^3. \end{array}$$

Il en résulte que les courbes Γ_0'' sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1' commun aux courbes σ_1, τ_{16} et que ce point est double conique pour cette surface. Si nous projetons Φ_1 de A_1' sur un hyperplan, nous obtenons une surface Φ_2 d'ordre $n - 8$. Aux courbes τ_{16}, σ_{16} correspondent sur Φ_2 une cubique σ_{16} et une droite σ_{16}. Au domaine du point A_1' correspond une conique ρ_0 rencontrant τ_{12}. A la droite σ_1 correspond un point de la courbe ρ_0, singulier pour la surface.

Les courbes C_0''', $C_0^{(4)}$, $C_0^{(5)}$ ont respectivement pour schémas

$$\left.\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{(1,5)^1,(1,4)^2,(1,3)^2,(1,2)^5,(1,1)^7,A^{12},(16,1)^3,(16,2)^1,\dots,(16,15)^1,} \\ (1,5,1)^1. & (1,2,1)^2,(1, 2,1,1)^1, & (16,1,1)^2. \\ & (1,2,1,1,1)^1. & \end{array}\right\} (C_0''').$$

$$\left.\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{(1,5)^1, (1,4)^2, \dots, (1,2)^2, (1,1)^9, A^{13}, (16,1)^2, (16,2)^1, \dots, (16,15)^1,} \\ (1,5,1)^1. & (1,1,1)^1, & (16,1,1)^1. \\ & (1,1,1,1)^1, & \\ & \dots & \\ & (1,1,1,6)^1. & \end{array}\right\} (C_0^{(4)}),$$

$$\left.\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{(1,5)^1, (1,4)^2, \dots, (1,2)^2, (1,1)^8, A^{14}, (16,1)^1, \dots, (16,15)^1,} \\ (1,5,1)^1. & (1,1,1)^5, (1,1,1,1)^1, & \\ & & (1,1,1,1,1)^1, \\ & & \dots \\ & & \dots \\ & & \dots \\ & & (1,1,1,1,4)^1. \end{array}\right\} (C_0^{(5)}).$$

On voit que sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0'''' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_2' commun à ρ_0 et à τ_{16} ; les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ par les hyperplans tangents à la courbe σ_{16} en ce point et les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ par les hyperplans osculant τ_{16} au même point.

En un point de diramation d'indices (16, 20), *la surface Φ a un point multiple d'ordre six, auquel est infiniment voisin un point double conique ; ce point équivaut à l'ensemble de quatre courbes rationnelles de degrés virtuels* — 2, — 2, — 6, — 2.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_0 + \tau_{16} + \sigma_{16},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'''' + \sigma_1 + 2\rho_0 + \tau_{16} + \sigma_{16}.$$

13. Supposons maintenant $\alpha = 18$, $\beta = 21$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 18\mu \equiv 0, \quad \mu + 21\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 4, \mu_1 = 3 \, ; \lambda_2 = 1, \mu_2 = 8 \, ; \lambda_3 = 11, \mu_3 = 1 \, ; \lambda_4 = 8, \mu_4 = 6 \, ;$$
$$\lambda_5 = 5, \mu_5 = 11 \, ; \ldots.$$

On a

$$\lambda_1 + 18\mu_1 = 58 \, ; \quad \mu_1 + 21\lambda_1 = 87.$$

Les courbes C_0' ont pour schéma

$$(1, 20)^1, \ldots, (1, 2)^1, (1, 1)^3, A^7, (18, 1)^3, (18, 2)^3, (18, 3)^2, (18, 4)^4, \ldots, (18,17)^5.$$

$$(1, 1, 1)^1, \ (1, 1, 1, 1)^1 \qquad (18, 3, 1)^1.$$

Sur la surface Φ_1 il correspond aux domaines des points (1, 20), (1, 1, 1, 1), (18, 3, 1), (18, 17), unis de première espèce pour l'involution, respectivement quatre droites σ_1, τ_1, τ_{18}, σ_{18}.

Les courbes C_0'' ont pour schéma

$$(1, 20)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^9, (18, 1)^4, (18, 2)^1, \ldots, (18, 17)^1,$$
$$(18, 1, 1)^3,$$
$$(18, 1, 2)^1, (18, 1, 2, 1)^1, (18, 1, 2, 2)^1.$$

Il en résulte que sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_1', commun aux droites τ_1, τ_{18}. Ce point est simple pour Φ_1 et à son domaine correspond le domaine du point uni de première espèce (18, 1, 2, 2).

Les courbes C_0'''' passent simplement par les points (18, 1), ..., (18, 17). Il en résulte que les hyperplans découpant sur Φ_1 les courbes Γ_0'''' ne peuvent rencontrer la droite σ_{18} en un point fixe. Par contre, les courbes C_0'''' ne peuvent plus passer par le point (1, 20) et les hyperplans des courbes Γ_0'''' rencontrent la droite σ_1 en un point fixe. Supposons que ce point n'appartienne pas à la droite τ_1.

Sur les courbes C_0'''', le point A est l'origine d'une seule branche (superlinéaire) tangente à a_1, à savoir

$$A^{12},\ (1, 1)^{11},\ (1, 2)^{6},\ (1, 2, 1)^{5},\ (1, 2, 1, 1)^{1},\ (1, 2, 1, 1, 1)^{1},\ \ldots,\ (1, 2, 1, 1, 4)^{1}.$$

La surface Φ_1 est d'ordre $n - 4$, le système $|\Gamma_0'''|$ est de degré $n - 5$ et le système $|\Gamma_0''''|$ devrait être de degré $n - 6$. Or, dans les conditions précédentes, ce degré est inférieur à $n - 6$. Les hyperplans des courbes Γ_0'''' passent donc par la droite τ_1 et celle-ci rencontre la droite σ_1 en un point A'_{11}.

Si le point A'_{11} est simple pour la surface Φ_1, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_{18} + \sigma_{18}\ ;$$

les droites σ_1, τ_1, τ_{18}, σ_{18} ont les degrés virtuels -2, -3, -3, -2 et on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'''' + \sigma_1 + 2\tau_1 + \tau_{18} + \sigma_{18}.$$

Les courbes Γ_0'''' coupent τ_1 en quatre points et le point (1, 1 1,1) est quadruple pour les courbes C_0''''. Il en est de même du point (1, 1, 1) et par suite le point (1, 1) est multiple d'ordre huit au moins pour les courbes C_0''''. Mais cela est impossible, car les courbes C_0'''' ayant onze de leurs tangentes en A confondues avec a_1, la somme des multiplicités de ces courbes aux points (1, 1), (1, 1, 1) ne peut excéder 11. Il en résulte que le point A'_{11} est singulier pour Φ_1 ; il est équivalent à une courbe rationnelle τ_2 de degré virtuel inférieur à -1, rencontrant en un point chacune des courbes σ_1, τ_1. Par contre, au point de vue des transformations birationnelles, les droites σ_1, τ_1 ne se rencontrent pas.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau_2 + \tau_1 + \tau_{18} + \sigma_{18}$$

et les courbes σ_1, τ_2, τ_1, τ_{18}, σ_{18} ont les degrés virtuels — 2, — 2, — 3, — 3, — 2. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'''' + \sigma_1 + \tau_2 + 2\tau_1 + \tau_{18} + \sigma_{18}$$

et les courbes Γ_0'''' coupent τ_2 en un point, τ_1 en trois points. On en conclut que les courbes C_0'''' ont pour schéma

$$(1, 6)^1, (1, 5)^2, \ldots, (1, 2)^2, (1, 1)^8, A^{12}, (18, 1)^1, \ldots, (18, 17)^1.$$
$$(1, 6, 1)^1. \qquad (1, 1, 1)^3. \ (1, 1, 1, 1)^3.$$

Le domaine du point (1, 6, 1) correspond à la courbe infiniment petite τ_2, domaine du point A'_{11}.

Le degré du système $|\Gamma_0''''|$ est $n - 9$.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ayant la multiplicité 14 en A, ne peuvent plus passer par le point (18, 17). Il y a six tangentes à ces courbes en A confondues avec a_{18} et les courbes $C_0^{(4)}$ passent six fois par les points (18, 1), (18, 2), trois fois par (18, 3) et par le point (18, 3, 1), qui correspond à τ_{18}. On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par les droites τ_1, τ_{18}. De plus, cette dernière droite coupe σ_{18} en un point, simple pour Φ_1.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ont par suite pour schéma

$$(1, 6)^1, (1, 5)^2, \ldots, (1, 2)^2, (1, 1)^6, A^{14}, (18, 1)^6, (18, 2)^6, (18, 3)^3,$$
$$(1, 6, 1)^1, \qquad (11, 1)^2, (1, 1, 1, 1)^2. \qquad (18, 3, 1)^3.$$

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + \tau_2 + 2(\tau_1 + \tau_{18}) + \sigma_{18}.$$

Observons que les sections de Φ_1 par les hyperplans passant par A'_{11}, c'est-à-dire les courbes

$$\Gamma_0 - \sigma_1 - 2\tau_2 - \sigma_1 - \tau_{18} - \sigma_{18},$$

rencontrent τ_2 en deux points, donc le point A'_{11} est double conique pour la surface Φ_1.

Un point de diramation d'indices (18, 21) *est un point quadruple de la surface, auquel est infiniment voisin un point double conique ; il est équivalent à un ensemble de cinq courbes rationnelles de degrés virtuels respectifs* — 2, — 2, — 3, — 3, — 2.

14. Considérons maintenant le cas où $\alpha = 19$, $\beta = 26$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 19\mu \equiv 0, \qquad \mu + 26\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont :

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 3 ; \lambda_2 = 2, \mu_2 = 6 ; \lambda_3 = 10, \mu_3 = 1 ; \lambda_4 = 3, \mu_4 = 9 ;$$
$$\lambda_5 = 11, \mu_5 = 4 ; \ldots.$$

Les courbes C_0' ont pour schéma

$(1,25)^1, \ldots, (1,1)^1, A^4, (19,1)^3, (19,2)^3, (19,3)^3, (19,4)^2, (19,5)^1, \ldots,$
$(19,18)^1$
$(19, 4, 1)^1$

Aux points unis de première espèce (1, 25), (19, 4, 1), (19, 18) correspondent sur Φ trois droites, respectivement σ_1, τ_{19}, σ_{19}. La surface Φ_1 est d'ordre $n - 3$.

Les courbes C_0'' ne peuvent plus passer par le point (1, 25) ; elles passent encore par le point (19, 18), mais ne peuvent plus passer par le point (19, 4, 1). Les courbes Γ_0'' sont donc découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1', commun aux droites σ_1 et τ_{19}.

Les courbes C_0'' ont pour schéma

$(1, 11)^1, (1, 10)^2, \ldots, (1, 1)^2, A^8, (19, 1)^4, (19, 2)^1, \ldots, (19, 18)^1,$
$(1,1 1, 1)^1.$ $\qquad (19, 1, 1)^2, (19, 1, 1, 1)^1,$
$(19, 1, 1, 1, 1)^1.$

Le système $|\Gamma_0'''|$ a le degré $n - 5$ et le point A_1' est double biplanaire pour la surface Φ. En projetant celle-ci du point A_1' sur un hyperplan, ou obtient une surface Φ_2 sur laquelle aux domaines des points unis (1, 11, 1) et (19, 1, 1, 1, 1) correspondent des droites ρ_{11}, ρ_{21} se coupant en un point A_2'. A la droite σ_1 de Φ_1 correspond au point de ρ_{11}, singulier pour Φ_2 ; à la droite τ_{19} correspond un point de ρ_{21}, singulier pour Φ_2. Par ce point passe la droite σ_{19}, projection de la droite σ_{19} de Φ_1.

Les courbes C_0''' ne peuvent plus passer par (19, 1, 1, 1, 1) ; elles passent simplement par les points (19, 1), ..., (19, 18). Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (1, 11, 1), car elles passent onze fois par A. On en conclut que sur la surface Φ_2, les courbes Φ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A_2'.

Si sur les courbes C_0'', le point A était l'origine d'une seule branche, cette branche aurait le schéma

$$(1, 2)^8, (1, 1)^{10}, A^{11}.$$
$$(1, 2, 1)^2, (1, 2, 1, 1)^2, (1, 2, 1, 2)^2, (1, 2, 1, 3)^2.$$

Le point A_2' serait double conique pour Φ_2 et le système $| \Gamma_2''' |$ aurait d'une part le degré $n - 7$, d'autre part le degré $n - 11$, ce qui est absurde. On en conclut que le point A_2' est double biplanaire pour Φ_2. En projetant Φ_2 de A_2' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_3 sur laquelle, au domaine du point A_2' correspondent deux droites de degré — 2, se coupant en un point. Soient ρ_{12}, ρ_{22} ces droites. A la droite ρ_{11} et à σ_1 correspond un même point de ρ_{12}, singulier pour Φ_3. De même, à la droite ρ_{21} et à τ_{19} correspond un même point de ρ_{22}, singulier pour Φ_3, par lequel passe la droite σ_{19}, qui correspond à la droite σ_{19} de Φ_2.

Les courbes $C_0^{(4)}$, qui ont la multiplicité 12 en A, ne peuvent plus passer par le point (19, 18). D'autre part, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, dont les hyperplans passent par un point de la droite σ_{19}, ne peuvent rencontrer en un point chacune des droites ρ_{12}, ρ_{22}, car sur les courbes $C_0^{(4)}$, le point A serait l'origine des mêmes branches, tangentes à a_1, que les courbes C_0'''. Or, cela est impossible, car A est multiple d'ordre 12 pour les premières courbes et d'ordre 11 pour les secondes. D'autre part, si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient par le point (1, 1, 6), elles auraient au moins sept tangentes en A confondues avec a_1, alors qu'elles n'en ont que trois. Il en résulte que les courbes $C_0^{(4)}$ passent une fois par les points (1, 6, 1, 1), (1, 6, 1), deux fois par (1, 6) et trois fois par (1, 5), ..., (1, 1). Le point (1, 6, 1, 1) correspond donc soit à la droite ρ_{12}, soit à la droite ρ_{22}.

De ce qui précède, on déduit que les courbes C_0''' ont pour schéma

$$(1, 6)^2, (1, 5)^3, \ldots, \quad (1, 1)^3, A^{12}, (19, 1)^1, \ldots, (19, 18)^1,$$
$$(1, 6, 1)^1, (1, 6, 1, 1)^1, (1, 1, 1)^1,$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(1, 1, 6)^1.$$

Le système $| \Gamma_0''' |$ a bien le degré $n - 7$.

Si le point (1, 1, 6) correspond à la droite ρ_{12}, celle-ci doit rencontrer σ_{19} et les hyperplans passant par ce point découpent sur Φ_3 les courbes $\Gamma_0^{(4)}$. Ce point doit être simple pour Φ_3. Or, dans cette hypothèse, on trouve que les courbes $C_0^{(4)}$ passent 9 fois par (19, 1), 8 fois par (19, 2) et une fois par huit points (19, 2, 1), (19, 2, 1, 1), ..., (19, 2, 1, 7). Mais alors, $|\Gamma_0^{(4)}|$ aurait le degré $n - 12$ au lieu de $n - 8$. Il en résulte que le point (1, 1, 6) correspond à la droite ρ_{22} et le point (1, 6, 1, 1) à la droite ρ_{12}. Par conséquent, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_3 par les hyperplans passant par le point commun aux droites ρ_{22}, σ_{19}. Mais ce point représente les droites τ_{19}, ρ_{21} ; donc les courbes $C_0^{(4)}$ passent par les points (19, 4, 1) et (19, 1, 1, 1, 1). Cela étant, on trouve que les courbes $C_0^{(4)}$ ont le schéma

$$\begin{array}{lll}
(1,6)^2, \quad (1,5)^3, \ldots, (1,1)^3, A^{12}, & (19,1)^7, (19,2)^4, (19,3)^4, & (19,4)^2, \\
(1,6,1)^1, (1,6,1,1)^1. & (19,1,1)^2, (19,1,1,1)^1, & (19,4,1)^2. \\
& & (19,1,1,1,1)^1.
\end{array}$$

Le système $|\Gamma_0^{(4)}|$ a le degré $n - 10$; le point commun aux droites ρ_{22}, σ_{19} est triple pour Φ_3, le cône tangent en ce point se décomposant en un cône du second ordre équivalent à τ_{19} et en un plan, équivalent à ρ_{21}.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21} + \tau_{19} + \sigma_{19},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21}) + \tau_{19} + \sigma_{19},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + 2\rho_{11} + 3(\rho_{12} + \rho_{22}) + 2\rho_{21} + \tau_{19} + \sigma_{19},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\rho_{11} + 3(\rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21}) + 2\tau_{19} + \sigma_{19}.$$

Les courbes σ_1, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{21}, ρ_{22}, σ_{19} ont le degré virtuel -2 et la courbe τ_{19}, le degré virtuel -3.

Un point de diramation d'indices (19, 26) *est un point triple de la surface Φ, auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire ; il est équivalent à l'ensemble de sept courbes rationnelles, l'une de degré virtuel -3, les autres de degré virtuel -2.*

15. Envisageons le cas $\alpha = 23$, $\beta = 24$. Les congruences

$$\lambda + 23\mu \equiv 0, \qquad \mu + 24\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

ont pour solutions :

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 5 ; \quad \lambda_2 = 6, \mu_2 = 1 ; \quad \lambda_3 = 2, \mu_3 = 10 ;$$
$$\lambda_4 = 7, \quad \mu_4 = 6 ; \ldots .$$

Les courbes C_0' ont pour schéma

$$(1, 23)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^6, (23, 1)^2, (23, 2)^1, \ldots, (23, 22)^1,$$
$$(23, 1, 1)^1,$$
$$(23, 1, 2)^1,$$
$$(23, 1, 3)^1.$$

Aux points unis de première espèce (1, 23), (23, 1, 3), (23, 22) correspondent sur la surface Φ_1, d'ordre $n - 3$, respectivement trois droites σ_1, τ_{23}, σ_{23}.

Les courbes C_0'' passent une fois par chacun des points (23, 1), ..., (23, 22) ; elles ne peuvent plus passer par le point (23, 1, 3) ni par le point (1, 23), donc sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0'' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_1' commun aux droites σ_1, τ_{23}.

Si les courbes C_0'' possédaient une seule branche d'origine A, tangente à a_1, ces courbes passeraient six fois par les points (1, 1), (1, 2), (1, 3), quatre fois par (1, 4) et deux fois par les points (1, 4, 1), (1, 4, 1, 1). Le point A_1' serait double conique pour Φ_3 et $|\Gamma_0''|$ devrait donc avoir le degré $n - 5$. Or, en comptant le nombre de points de l'intersection de deux courbes C_0'' absorbés en A, on trouve que ce degré est $n - 7$. L'absurdité à laquelle nous parvenons prouve que A_1' est un point double biplanaire pour Φ_1.

Les courbes C_0''' passent nécessairement deux fois par les points (1, 1), ..., (1, 8) et une fois par les points (1, 9), (1, 9, 1). On en conclut que les courbes C_0'' ont pour schéma

$$\begin{array}{ll} (1, 9)^1, (1, 8)^2, \ldots, (1, 3)^2, & (1, 2)^3, (1, 1)^6, A^7, (23, 1)^1, \ldots, (23, 22)^1. \\ (1, 9, 1)^1. & (1, 2, 1)^1, \\ & (1, 2, 2)^1, \\ & (1, 2, 3)^1. \end{array}$$

Le système $|\Gamma_0''|$ a bien le degré $n - 5$.

Projetons la surface Φ_1 de A_1' sur un hyperplan et soit Φ_2 la surface obtenue. Aux points unis de première espèce (1, 9, 1), (1, 2, 3) correspondent des droites que nous désignerons (à l'ordre près) par ρ_1, ρ_2. A σ_1 correspond un point de ρ_1 et à τ_{23} un point de ρ_2, par lequel passe la droite σ_{23}, projection de la droite de même dénomination Φ_1.

Les courbes C_0'''' ne peuvent plus passer par le point (23, 22), ni par le point (1, 2, 3). Si ce dernier point correspondait à la droite ρ_1, celle-ci devrait rencontrer σ_{23} en un point qui serait simple par Φ_2. Mais alors, les courbes C_0'''' devraient passer dix fois par le point (23, 1), sept fois par le point (23, 2), trois fois par les points (23, 2, 1), (23, 2, 1, 1) et une fois par les points (23, 2, 1, 2), (23, 2, 1, 2, 1) et (23, 2, 1, 2, 2). Le système $|\Gamma_0''''|$ aurait le degré $n - 12$ au lieu de $n - 6$. On en conclut que le point (1, 1, 1) représente la droite ρ_1 et le point (1, 2, 3) la droite ρ_2.

Sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0'''' sont découpées par les hyperplans passant par le point commun aux droites ρ_2, σ_{23}. Ce point représente, comme on l'a vu, la droite τ_{23}. Les courbes C_0'''' ont donc le schéma

$$\begin{array}{lll}(1, 9)^1, (1, 8)^2, \ldots, (1, 1)^2, A^{12}, & (23, 1)^4, (23, 2)^2, \ldots, & (23,7)^2, (23,8)^1, \\ (1, 9, 1)^1 & (23, 1, 1)^2, & (23,8,1)^1. \\ & (23, 1, 2)^2, & \\ & (23, 1, 3)^2. & \end{array}$$

Le système $|\Gamma_0''''|$ a le degré $n - 8$. Le point commun à ρ_2 et à σ_{23} sur Φ_2 est donc triple pour cette surface. Le cône tangent se décompose en un cône quadratique, correspondant à (23, 1, 3) et en un plan, correspondant au point (23, 8, 1). Le domaine de ce point est donc équivalent à la courbe τ_{23} et à une courbe rationnelle que nous désignerons par τ.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \tau_{23} + \tau + \sigma_{23}.$$

Les courbes σ_1, ρ_1, ρ_2, τ, σ_{23} ont le degré virtuel -2 et τ_{23} le degré virtuel -3.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2) + \tau_{23} + \tau + \sigma_{23},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'''' + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \tau_{23} + \tau) + \sigma_{23}.$$

On voit que les courbes Γ_0'''' coupent bien τ_{23} en deux points et τ en un point.

Considérons les courbes $\Gamma_0' - \tau$. Elles rencontrent la courbe τ

en deux points, donc, sur la surface Φ_1, le point commun aux droites τ_{23}, σ_{23} est double conique pour la surface.

Un point de diramation d'indices (23, 24) *est un point triple pour la surface* Φ, *auquel sont infiniment voisins dans une direction, un point double biplanaire, dans une autre direction, un point double conique ; il est équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles dont l'une a le degré virtuel* — 3, *les autres le degré virtuel* — 2.

16. Il nous reste à examiner le cas $\alpha = \beta = 28$, qui va nous donner un point de diramation symétrique. Les solutions des congruences

$$\lambda + 28\mu \equiv 0, \qquad \mu + 28\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 29)$$

sont données par

$$\lambda = \mu = 1, 2, 3, \ldots, 14.$$

Au point A′, la surface Φ possède un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs treize points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire [1]. Nous nous bornerons à indiquer le comportement des courbes C_0', C_0''', ... au point A pour une des branches de ces courbes, l'autre branche ayant un comportement symétrique.

Courbes C_0' :

$(1, 27)^1, (1, 26)^1, \ldots, (1, 1)^1, A^2.$

Courbes C_0'' :

$(1, 13)^1, (1, 12)^2, \ldots, (1, 1)^2, A^4.$

$(1, 13, 1)^1.$

Courbes C_0''' :

$(1, 8)^2, (1, 7)^3, \ldots, (1, 1)^3, A^6.$

$(1, 8, 1)^1, (1, 8, 1, 1)^1.$

---

(1) *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Revista de la Universidad de Tucuman, 1910, pp. 283-291) ; *Points unis symétriques...* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1948, pp. 839-841).

Courbes $C_0^{(4)}$:

$(1, 6)^1, (1, 5)^4, \ldots, (1, 1)^4, A^8.$

$(1, 6, 1)^1,$

...

...

...

$(1, 6, 4)^1.$

Courbes $C_0^{(5)}$:

$(1, 4)^4, (1, 3)^5, (1, 2)^5, (1, 1)^5, A^{10}.$

$(1, 4, 1)^1, (1, 4, 1, 1)^1, (1, 4, 1, 2)^1, (1, 4, 1, 3)^1.$

Courbes $C_0^{(6)}$:

$(1, 3)^5, (1, 2)^6, (1, 1)^6, A^{12}.$

$(1, 3, 1)^1, (1, 3, 1, 1)^1, \ldots, (1, 3, 1, 4)^1.$

Courbes $C_0^{(7)}$:

$(1, 3)^1, (1, 2)^7, (1, 1)^7, A^{14}.$

$(1, 3, 1)^1,$

...

...

...

$(1, 3, 6)^1.$

Courbes $C_0^{(8)}$:

$(1, 2)^5, (1, 1)^8, A^{16},$

$(1, 2, 1)^3, (1, 2, 1, 1)^2,$

$(1, 2, 1, 1, 1)^1, (1, 2, 1, 1, 1, 1)^1.$

Courbes $C_0^{(9)}$:

$(1, 2)^2, (1, 1)^9, A^{18}.$

$(1, 2, 1)^2,$

$(1, 2, 2)^2,$

$(1, 2, 3)^2,$

$(1, 2, 4)^1, (1, 2, 4, 1)^1.$

Courbes $C_0^{(10)}$:

$(1, 1)^9$, $(A^{20}$,

$(1, 1, 1)^1$, $(1, 1, 1, 1)^1$, ..., $(1, 1, 1, 8)^1$.

Courbes $C_0^{(11)}$:

$(1, 1)^7$, A^{22}.

$(1, 1, 1)^4$, $(1, 1, 1, 1)^3$,

$(1,1,1,1,1)^1$, $(1,1,1,1,1,1)^1$, $(1,1,1,1,1,2)^1$.

Courbes $C_0^{(12)}$:

$(1, 1)^5$, A^{24}.

$(1, 1, 1)^5$,

$(1, 1, 2)^2$, $(1, 1, 2, 1)^2$, $(1, 1, 2, 2)^1$,

$(1, 1, 2, 2, 1)^1$.

Courbes $C_0^{(13)}$:

$(1, 1)^3$, A^{26}

$(1, 1, 1)^3$,

...

...

...

$(1, 1, 4)^3$,

$(1, 1, 5)^1$, $(1, 1, 5, 1)^1$, $(1, 1, 5, 2)^1$.

Courbes $C_0^{(14)}$:

$(1, 1)^1$, A^{28}.

$(1, 1, 1)^1$,

...

...

...

$(1, 1, 13)^1$.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \rho_{11} + \rho_{12} + \dots + \rho_{14} + \rho_{24} + \dots + \rho_{21},$$

chacune des courbes ρ_{11}, ..., ρ_{21} ayant le degré virtuel — 2.

Un point de diramation d'indices (28, 28) *est un point double biplanaire de la surface* Φ *auquel sont infiniment voisins successifs treize points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire ; il est équivalent à vingt-huit courbes rationnelles de degré virtuel* — 2.