Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 5 février 1949

GÉOMÉTRIE

Sur une représentation des transformations birationnelles de l'espace.

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nous avons fait connaître, voici quelques années, une représentation des couples de points homologues dans une transformation birationnelle du plan par les points d'une surface et, parallèlement, une représentation par les points d'une variété rationnelle à trois dimensions, des couples de points homologues dans une transformation birationnelle de l'espace [1]. Nous nous proposons, dans cette note, de considérer les courbes fondamentales de seconde espèce dans cette dernière représentation.

1. Rappelons tout d'abord rapidement en quoi consiste la représentation en question.

Considérons une transformation birationnelle T entre deux espaces à trois dimensions Σ, Σ' et supposons qu'aux plans α de Σ, T fasse correspondre des surfaces A' d'ordre n' de Σ' et qu'aux plans α' de Σ', T^{-1} fasse correspondre des surfaces A d'ordre n de Σ. Considérons le système complet

$$|D| = |\alpha + A|$$

[1] *Sur la représentation des transformations birationnelles planes* (Bull. de Soc. des Sciences de Liége, 1942, pp. 268-271) ; *Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace.* (Idem., pp. 428-432). Ces questions ont été l'objet d'un cours fait en mai 1948 à l'Université « Charles IV » de Prague et de conférences faites en janvier 1949 à l'Université de Bordeaux. Un résumé des leçons faites à Prague est en cours d'impression dans *Časopis pro Matematiky a Fysiky.*

et soit r sa dimension. Rapportons projectivement les surfaces de $|D|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions Aux points de Σ correspondent les points d'une variété V_3 d'ordre $3(n + n') + 2$. On obtient la même variété en partant du système $|\alpha' + A'|$ de Σ', de sorte qu'un point de V_3 représente deux points de Σ, Σ', homologues dans T.

Aux plans α de Σ (ou aux surfaces A' de Σ') correspondent sur V_3 des surfaces F, d'ordre $2n + n' + 1$, rationnelles, formant un système homaloïdal $|F|$. Aux surfaces A (ou aux plans α') correspondent sur V_3 des surfaces F', rationnelles, d'ordre $n + 2n' + 1$, formant un système homaloïdal $|F'|$.

Aux points fondamentaux, aux courbes fondamentales de première espèce et aux surfaces fondamentales des deux espaces correspondent sur V_3 des surfaces rationnelles. D'une manière précise, une de ces surfaces représente les couples de points de Σ, Σ' formés des points infiniment voisins d'un élément fondamental (points ou courbe) et des points homologues sur la surface fondamentale correspondante dans l'autre espace.

2. Soient Γ une courbe fondamentale de seconde espèce, d'ordre ν, multiple d'ordre s pour les surfaces A, et Γ' la courbe fondamentale associée dans le second espace, ν' son ordre et s' sa multiplicité par les surfaces A'. On sait que l'on a

$$s = \lambda\nu', \quad s' = \lambda\nu,$$

λ étant un entier positif (1).

Considérons un point P de Γ, la tangente t à cette courbe en P et un plan ϖ passant par t. Les surfaces A tangentes en P au plan ϖ forment un réseau et ont encore $\lambda - 1$ plan tangents fixes en P. Parmi les surfaces D tangentes en P au plan ϖ se trouvent les surfaces formées des surfaces A touchant ϖ en P, complétées par des plans quelconques de l'espace et les surfaces formées du plan ϖ et des surfaces A quelconques. Par suite, les

(1) MONTESANO, *Sulla teoria generale delle corrispondence birazionali dello spazio* (REND. ACCAD. DEI LINCEI, 1er sem. 1918 et 2e sem. 1921). Voir aussi notre exposé sur *Les transformations birationnelles de l'espace* (MÉMORIAL DES SCIENCES MATH., Gauthier-Villars, 1934) et le tome I de notre *Géométrie algébrique* (Liége, éd. Sciences et Lettres, 1948).

surfaces D touchant ϖ en P ont en général $s - 1$ plans tangents variables en P. A ces surfaces correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P_1 de V_3. Le point P_1 représente les couples formés d'un point infiniment voisin de P dans ϖ et du point P′ de Γ' homologue du précédent.

Lorsque le plan ϖ décrit le faisceau d'axe t, le point P′ décrit une courbe rationnelle γ, d'ordre s, tracée sur V_3.

Lorsque le point P décrit la courbe Γ, la courbe γ ne peut rester fixe ; elle engendre une surface M et les courbes γ tracées sur cette surface forment un faisceau $|\gamma|$.

Reprenons le même raisonnement en partant d'un point P′ de Γ'. Nous obtenons cette fois une courbe γ', rationnelle, d'ordre s', tracée sur M et, lorsque P′ décrit Γ', la courbe γ' engendre sur M un faisceau $|\gamma'|$.

Recherchons maintenant en combien de points se rencontrent une courbe γ et une courbe γ'. Rappelons que dans le faisceau de plans d'axe t, il existe une involution g_λ^1 définie par la propriété que les surfaces A tangentes en P à un plan de ce faisceau, sont tangentes aux $\lambda - 1$ plans du groupe de g_λ^1 contenant ce premier plan. De même, dans le faisceau de plans dont l'axe est la tangente t' à Γ' en P′, il existe une involution g_λ^1 dont la définition est analogue à la précédente.

Ceci rappelé, considérons un point P de Γ, un point P′ de Γ' et les courbes γ, γ' correspondantes. Soient $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\lambda$ les plans tangents en P à Γ formant un groupe de l'involution g_λ^1 et $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots, \varpi'_\lambda$ les plans tangents en P′ à Γ' formant un groupe de l'involution g_λ^1. Nous supposons que ces groupes soient déterminés de la manière suivante : Aux plans α, passant par P, T fait correspondre les surfaces A′ tangentes en P′ aux plans ϖ'_1, $\varpi'_2, \ldots, \varpi'_\lambda$ et aux plans α' passant par P′, T^{-1} fait correspondre les surfaces A tangentes en P aux plans $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\lambda$.

Aux couples de points formés des points infiniment voisins de P dans $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\lambda$ et de P′, correspondent sur la courbe γ, λ points $P_1, P_2, \ldots, P_\lambda$. Ces points appartiennent également à la courbe γ' et représentent les couples de points formés de points infiniment voisins de P′ dans $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots, \varpi'_\lambda$ et de P.

Les courbes γ, γ' se coupent donc deux à deux en λ points.

3. Un plan α coupe la courbe Γ en ν points. Soit P un de ces points. Dans tout plan tangent à Γ en P, il existe un point infiniment voisin de P, par conséquent la courbe γ homologue de P sur M appartient à la surface F homologue de α sur V_3. Il en résulte que les surfaces F rencontrent la surface F suivant ν courbes γ.

De même, une surface F′ coupe la surface M suivant ν' courbes γ'.

Une surface F et une surface F′ forment une section hyperplane de V_3, donc la surface M est d'ordre $\nu s + \nu' s'$.

On peut obtenir ce résultat par une autre voie.

Considérons deux sections hyperplanes de V_3 ; il leur correspond dans Σ deux surfaces D. Prenons en particulier deux surfaces D dégénérées : $\alpha_1 + A_1$, $\alpha_2 + A_2$. La droite $\alpha_1\alpha_2$ ne rencontre pas Γ. et la courbe A_1A_2 ne rencontre pas en général Γ en des points variables. La courbe $\alpha_1 A_2$ rencontre Γ en ν points et il y a s points infiniment voisins d'un de ces points sur cette courbe. Il leur correspond sur V_3, νs points de M. De même, la courbe $\alpha_2 A_1$ donne naissance à νs points de M. On en conclut que dans S_r, un espace S_{r-2} coupe M en $2\nu s$ points, ce qui donne l'ordre de la surface M.

On a d'ailleurs

$$\nu s + \nu' s' = 2\lambda\nu\nu' = 2\nu s = 2\nu' s'$$

par les relations $s = \lambda\nu'$, $s' = \lambda\nu$.

4. La courbe commune à deux surfaces F ne rencontre pas la surface M, ce qui correspond au fait qu'une droite de Σ ne rencontre pas Γ.

A une droite de Σ rencontrant Γ correspond une courbe, commune à deux surfaces F, rencontrant M en un point. Les deux surfaces F contiennent la courbe γ passant par ce point. L'intersection de ces deux surfaces F se compose donc de cette courbe γ, d'ordre s, et d'une courbe C d'ordre $n + 1 - s$, rencontrant M en un point. Aux points de C_1 correspondent les couples de points formés d'un point de Σ situé sur la droite envisagée et d'un point de Σ' situé sur la courbe transformée. En particulier, au point de rencontre de C_1 avec la surface M correspond le couple formé du point d'appui de la droite sur Γ et du point d'appui de la courbe transformée sur Γ'.

L'étude des propriétés des courbes fondamentales de seconde espèce pourrait être poursuivie par l'intermédiaire de la surface M.

Liège, le 27 janvier 1949.