Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

par Lucien Godeaux (Liège)

C'est la lecture du beau Mémoire de MM. Enriques et Severi sur les surfaces hyperelliptiques [1] qui nous a conduit à l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.

Nos premières recherches ont porté sur les involutions appartenant aux surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), puis aux surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$).

Nous avons ensuite considéré les involutions appartenant à une surface algébrique quelconque et ces recherches nous ont conduit aux quelques applications dont il va être question.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution.

Nous pouvons construire, sur la surface F, un système linéaire simple $|C|$, complet, transformé en soi par T, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p, le premier étant dépourvu de points-base [2]. Si r est la dimension de $|C|$, en rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans de S_r, on transforme F en une surface normale que nous désignerons encore par F. A la transformation T correspond sur cette surface une transformation qui échange entre elles les sections hyper-

[1] F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392; t. 33, pp. 321-399).

[2] L. Godeaux, *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scientifiques*, n° 270, Paris, Hermann, 1935).

planes de F et qui est par conséquent déterminée sur la surface par une homographie de période p de S_r. Cette homographie sera encore désignée par T.

L'homographie T possède p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont nous désignerons les dimensions respectivement par $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$. On a d'ailleurs

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{p-1} + p = r + 1 .$$

Appelons Σ_i la gerbe formée par les hyperplans de S_r passant par les axes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$. Nous continuerons à désigner par C les sections hyperplanes de F dans S_r ; les hyperplans de Σ_i découpent sur F le système linéaire partiel $|C_i|$, appartenant à l'involution I_p.

Par hypothèse, le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base, donc les hyperplans de Σ_0 ne passent pas par un point fixe de F et les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie T ne rencontrent donc pas F. Les points unis de l'involution I_p appartiennent donc à l'axe σ_0 de l'homographie T et par conséquent, les systèmes linéaires $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ ont pour base les points unis de l'involution.

2. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions ou, ce qui est équivalent, projetons la surface F sur l'espace σ_0 à partir de l'espace linéaire minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Aux groupes de l'involution I_p correspondent les points d'une surface Φ, image de l'involution, normale dans σ_0.

Si n est l'ordre de Φ et π le genre de ses sections hyperplanes, le système $|C_0|$ et par conséquent le système $|C|$ ont le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Aux systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ de F correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|, |\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$; $|\Gamma_0|$ est le système des sections hyperplanes de Φ et les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ ont l'ordre n.

Aux points unis de l'involution correspondent sur Φ les points de diramation de la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F. Ces points de diramation sont des points singuliers pour la surface Φ et chacun d'eux est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles [1].

[1] L. Godeaux, *Les involutions...* (*loc. cit.*); — *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Annales de

Les courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1} passent par les points de diramation de Φ en rencontrant, en chacun de ces points, un certain nombre des courbes rationnelles composant ce point.

3. Envisageons sur F une courbe C non transformée en elle-même par T. Aux groupes de l'involution ayant un point sur C correspondent sur F les points d'une courbe Γ. Dans la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F, à cette courbe Γ correspondent la courbe C et ses transformées par T, T^2, ..., T^{p-1}, qui appartiennent également à $|C|$.

Il existe un nombre fini de groupes de l'involution dont deux points appartiennent à la courbe C envisagée ; ils appartiennent aux transformées de cette courbe et sont au nombre de $\frac{1}{2}p(p-1)n$. A un couple de points de C appartenant à un même groupe de l'involution correspond un point double de la courbe Γ. Celle-ci est donc de genre virtuel

$$p(\pi-1)+1+\tfrac{1}{2}p(p-1)n\,.$$

Lorsque la courbe C varie dans $|C|$, la courbe Γ engendre un système rationnel non linéaire et ses courbes appartiennent totalement à un système linéaire $|\Gamma|$.

Faisons tendre la courbe C, dans $|C|$, d'une manière continue, vers une courbe C_0. La courbe Γ correspondante varie d'une manière continue sur Φ et a pour limite une section hyperplane Γ_0, comptée p fois, de cette surface. On a donc

$$|\Gamma|=|p\Gamma_0|,$$

et les sections de Φ par les hypersurfaces d'ordre p de σ_0 appartiennent au système $|\Gamma|$.

Faisons maintenant varier C d'une manière continue dans $|C|$ en la faisant tendre vers une courbe C_1. La courbe Γ correspondante varie d'une manière continue sur Φ et a pour limite une courbe Γ_1 comptée p fois. Mais les courbes Γ_1 rencontrent un certain nombre de courbes rationnelles composantes des points de diramation. Si nous désignons par Δ_1 la somme de ces courbes rencontrées par les courbes Γ_1, nous avons donc

$$|\Gamma|=|p\Gamma_1+\Delta_1|.$$

l'Ecole Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210); — *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

Ce raisonnement peut se répéter pour les courbes Γ_2, ..., Γ_{p-1} et si nous désignons par Δ_2, Δ_3, ..., Δ_{p-1} les sommes des composantes des points de diramation rencontrées respectivement par les courbes Γ_2, Γ_3, ..., Γ_{p-1}, nous avons finalement les relations fonctionnelles

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \Delta_1 \equiv p\Gamma_2 + \Delta_2 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{p-1} + \Delta_{p-1}. \qquad (1)$$

Il existe des relations entre les genres arithmétiques, linéaires et les invariants de Zeuthen-Segre des surfaces F et Φ ; ces relations font intervenir la structure des points de diramation de Φ.

I. Surfaces dont le diviseur de Severi est quelconque

4. Les recherches de M. Severi sur la base des courbes tracées sur une surface algébrique ([1]) ont conduit ce géomètre à introduire un nouveau caractère des surfaces algébriques : le *diviseur* σ d'une surface.

Bornons-nous, pour plus de simplicité, à une surface régulière F. Si, λ étant un entier positif, les courbes λA et B appartiennent à un même système linéaire, on dira que la courbe A est obtenue en divisant la courbe B par l'entier λ. Evidemment, si B et λ sont donnés, la division de B par λ n'est pas toujours possible. Supposons qu'elle le soit. Eh bien, le nombre de courbes linéairement indépendantes que l'on peut obtenir en divisant B par λ admet un maximum σ, le diviseur de la surface F.

En d'autres termes, si les systèmes linéaires $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_t|$ sont tels que l'on a

$$\lambda A_1 \equiv \lambda A_2 \equiv \ldots \equiv \lambda A_t \equiv B,$$

t est au plus égal à σ, quels que soient $|B|$ et λ (si la division de B par λ n'est pas possible, on a $t = 0$).

Lorsque M. Severi établit sa théorie, on connaissait un exemple de surface ayant le diviseur $\sigma = 2$, la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes

([1]) F. Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Mathematische Annalen*, 1906, t. 62, pp. 194-225) ; — *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1908, pp. 449-468) ; — *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 2e sem. 1910, pp. 265-288).

d'un tétraèdre. Désignons par $|A_1|$ le système des sections planes de la surface et par $|A_2|$ le système des sextiques découpées sur la surface par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre. Les courbes $2A_1$, $2A_2$ appartiennent au système découpé sur la surface par les surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre.

Enriques avait démontré que la surface dont il vient d'être question représentait une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un $(p_a = P_4 = 1)$. C'est la raison pour laquelle la surface est de diviseur $\sigma = 2$ et cette remarque fut le point de départ de nos recherches sur la construction de surfaces de diviseur quelconque.

5. Reprenons la surface F contenant l'involution I_p, d'ordre p, dont il a été question au début et supposons que cette involution soit dépourvue de points unis. Dans ces conditions, les relations fonctionnelles (1) deviennent

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{p-1}$$

et la surface Φ a le diviseur $\sigma \geqslant p$ (1). Si la surface F est de diviseur un, on aura précisément $\sigma = p$.

Il est aisé de construire des exemples effectifs de surfaces de diviseur σ premier quelconque. Considérons, dans un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions, l'homographie T d'équations

$$x_0' : x_1' : \ldots : x'_{p-1} = x_0 : \varepsilon x_1 : \ldots : \varepsilon^{p-1} x_{p-1},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Les axes ponctuels de cette homographie sont les sommets de la figure de référence. Considérons ensuite la surface F, intersection complète de $p-3$ hypersurfaces d'ordre p, transformées chacune en soi par l'homographie T. Il est toujours possible de choisir ces hypersurfaces de manière que la surface F ne passe par aucun des sommets de la figure de référence. Dans ces conditions, l'homographie T engendre sur F une involution d'ordre p privée de points unis.

Soient $|D|$ le système des sections hyperplanes de F et D_0, D_1, ..., D_{p-1} les sections de la surface par les hyperplans

(1) L. Godeaux, *Sur certaines surfaces de diviseur supérieur à l'unité* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1914, pp. 362-368); — *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1915, pp. 182-185).

$x_0 = 0$, $x_1 = 0$, ..., $x_{p-1} = 0$ respectivement. Nous pouvons prendre pour système $|C|$ le système complet $|kC|$, où k est un entier positif et construire la surface Φ, actuellement dépourvue de points de diramation. La surface Φ a le diviseur $\sigma = p$ et si nous désignons par D_0', D_1', ..., D'_{p-1} les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes D_0, D_1, ..., D_{p-1}, nous avons

$$pD_0' \equiv pD_1' \equiv \ldots \equiv pD'_{p-1} .$$

Introduisons, comme M. Severi l'a fait dans ses travaux cités plus haut, les courbes virtuelles d'ordre zéro

$$M_0 = D_0' - D_0', \quad M_1 = D_0' - D_1', \ldots, M_{p-1} = D_0' - D'_{p-1} .$$

Les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$ peuvent s'obtenir en prenant

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_0 + M_1 , \quad \Gamma_2 \equiv \Gamma_0 + M_2 , \ \ldots, \ \Gamma_{p-1} \equiv \Gamma_0 + M_{p-1} .$$

On observera que le fait que p est premier ne joue pas ici un rôle essentiel (il n'en est pas de même lorsque l'involution possède des points unis) et que tout ce qui vient d'être dit s'étend immédiatement au cas où p n'est pas premier. Dans ce cas, dans l'exemple précédent, ε doit être une racine primitive d'ordre p de l'unité et non une racine d'un ordre facteur de p.

6. Reprenons la surface Φ du cas général et considérons les hypersurfaces découpant, sur Φ, le système $|p\Gamma_0|$. Désignons par V ces hypersurfaces (qui en général seront les hypersurfaces d'ordre p ne contenant pas Φ). Puisque l'on a

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{p-1} ,$$

il existe une hypersurface V ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ le long de chacune des courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1}.

Inversement, considérons une surface Φ de diviseur $\sigma = p$ et supposons qu'il existe au moins un système linéaire $|\Gamma_1|$, de courbes Γ_1 du même ordre que la surface Φ, tel que le système complet $|p\Gamma_1|$ coïncide avec le système complet $|p\Gamma_0|$, $|\Gamma_0|$ étant le système des sections hyperplanes. Il existe une hypersurface du système découpant sur Φ le système complet $|p\Gamma_0|$, ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ le long d'une courbe Γ_1.

Soient, en coordonnées non homogènes,

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{r_0-2} = 0$$

les équations de la surface Φ et $\varphi = 0$ l'équation de l'hypersurface dont il vient d'être question. Les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{r_0 - 2} = 0, \quad z^p = \varphi$$

représentent une surface F, mais la courbe Γ_1 étant une courbe de diramation apparente, cette surface F peut se réduire à p fois la surface Φ. Si l'on parvenait à démontrer que la surface F est irréductible (sous certaines conditions supplémentaires), il serait établi que les surfaces de diviseur $\sigma > 1$ s'obtiennent par le procédé que nous avons indiqué. Mais c'est là une question que nous n'avons pu résoudre [1].

II. Surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls

7. Ce sont les recherches de M. Castelnuovo qui devaient amener ce géomètre aux conditions de rationalité d'une surface algébrique qui conduisirent à l'étude des surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$. Le premier exemple d'une telle surface fut la surface du sixième ordre d'Enriques dont il a été question plus haut. Un second exemple fut construit à la même époque par M. Castelnuovo.

Considérons une surface Φ de genres $p_a = p_g = 0$, non rationnelle ; elle a donc le bigenre $P_2 > 0$. Si $P_2 = 1$ et si la courbe bicanonique est d'ordre zéro, la surface se ramène, par une transformation birationnelle, à la surface d'Enriques. On a alors $P_3 = 0$, $P_4 = 1$ et d'une manière générale, $P_{2i} = 1$, $P_{2i-1} = 0$. Si l'on a $P_2 \geqslant 1$ et si la courbe bicanonique n'est pas d'ordre zéro, deux cas peuvent se présenter suivant que les systèmes bicanonique et pluricanoniques sont composés au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques ou qu'il n'en est pas ainsi. Dans le premier cas, le genre linéaire est $p^{(2)} = 1$; dans le second cas, le seul dont nous nous occuperons ici, on a $P_2 = p^{(1)}$.

M. Campedelli [1] a construit des plans doubles dont la courbe de diramation est du huitième ou du dixième ordre, pour lesquels on a $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ ou $P_2 = 3$.

(1) A. Comessatti, *Sulle superficie multiple cicliche* (*Rendiconti del Seminario Matematico di Padova*, 1930, pp. 1-45).

(2) Voir au sujet de ces surfaces notre exposé *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Actualités scientifiques*, n° 123, Paris, Hermann, 1934).

8. Reprenons la surface F contenant l'involution cyclique I_p et supposons celle-ci dépourvue de points unis ; σ_0 ne rencontre donc pas la surface F. Les résultats de la théorie des involutions que nous allons utiliser n'exigent pas que p soit premier.

Entre les genres artihmétiques p_a de F et p_a' de Φ, nous avons la relation (¹)

$$p_a + 1 = p(p_a' + 1) \,.$$

Si donc la surface Φ est de genre $p_a' = 0$, on a $p = p_a + 1$.

Si nous supposons la surface F régulière, il en sera de même de la surface Φ et celle-ci sera de genres $p_a = p_g = 0$.

Désignons par $|K|$ le système canonique de la surface F et supposons qu'il ne soit pas composé au moyen d'un faisceau. Supposons en outre $p_a \geqslant 2$.

Le système canonique $|K|$ est transformé en lui-même par T et contient un certain nombre t de systèmes $|K_1|$, $|K_2|$, ..., $|K_t|$ appartenant à l'involution I_p. Soient s_1, s_2, ..., s_t les dimensions de ces systèmes et $|K_1'|$, $|K_2'|$, ..., $|K_t'|$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur Φ. D'après la théorie des homographies, on a

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_t + t = p_a \,,$$

donc, puisque $p = p_a + 1$, $t < p$.

Puisque le genre géométrique de Φ est nul, aucun des systèmes $|K_1'|$, $|K_2'|$, ..., $|K_t'|$ n'est le système canonique de cette surface.

Formons les systèmes complets $|2\,K_1'|$, $|2\,K_2'|$, ..., $|2\,K_t'|$, $|K_1' + K_2'|$, ..., $|K'_{t-1} + K_t'|$, systèmes qui ne sont pas tous distincts en général. Désignons par $|L_1'|$, $|L_2'|$, ..., $|L_h'|$ les systèmes linéaires distincts que l'on obtient ainsi ; il leur correspond sur F des systèmes linéaires $|L_1|$, $|L_2|$, ..., $|L_h|$ qui appartiennent au système bicanonique $|L| = |2\,K|$ de F et sont précisément des systèmes appartenant à l'involution, faisant partie de $|L|$. Supposons qu'il existe en outre $k - h$ systèmes $|L_{h+1}|$, ..., $|L_k|$ de $|L|$ appartenant à l'involution et soient

(¹) Cette formule peut se déduire d'une relation très générale due à M. Severi : *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (*Rendiconti del Istituto Lombardo*, 1903, pp. 495-511). Pour le cas particulier utilisé ici, voir notre exposé sur *Les involutions...* (*loc. cit.*).

$|L'_{h+1}|$, ..., $|L'_k|$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur Φ. On a évidemment $k \leqslant p$.

Les courbes L découpent sur une courbe K_1 par exemple, la série canonique de celle-ci. Dans cette série canonique, il y a p séries linéaires partielles appartenant à l'involution I_p (ou si l'on préfère à l'involution d'ordre p déterminée par I_p sur K_1). A ces p séries linéaires partielles correspondent sur la courbe K_1' homologue de K_1 la série canonique de K_1' et $p-1$ séries paracanoniques. Les séries partielles considérées sur K_1 sont découpées (en tout si $k=p$ ou en partie si $k<p$) par les courbes L_1, L_2, ..., L_k. Par conséquent les systèmes $|L_1'|$, $|L_2'|$, ..., $|L_k'|$ découpent sur une courbe K_1' des séries paracanoniques et l'un d'eux découpe éventuellement la série canonique, c'est-à-dire est l'adjoint à $|K_1'|$.

De même, les systèmes $|L_1'|$, $|L_2'|$, ..., $|L_k'|$ découpent, sur une courbe K_2', ou K_3', ..., ou K_t', des séries paracanoniques et éventuellement l'un d'eux découpe la série canonique.

9. Supposons que le système $|L_1'|$ ne contienne pas de courbes dégénérées en des courbes contenant une courbe K_1' et ne soit pas l'adjoint à $|K_1'|$. Il découpe alors sur une courbe K_1' une série paracanonique et a donc la dimension $\pi-2$, π étant le genre de la courbe K_1'.

Supposons d'autre part que $|L_1'|$ contienne les courbes $K_2'+K_i'$. Il ne peut être l'adjoint à $|K_2'|$, car autrement, les courbes K_i' seraient des courbes canoniques de la surface et on n'aurait pas $p_g=0$. Le système $|L_1'|$ découpe donc sur une courbe K_2' une série paracanonique et puisque $|K_i'|$ a la dimension s_i, $|L_1'|$ a la dimension $\pi+s_i-1$, car la courbe K_2' a le même genre π que la courbe K_1'. On aurait donc $s_i=1$, ce qui est absurde.

Il en résulte que $|L_1'|$ doit être adjoint à $|K_1'|$. Comme aucune de ses courbes ne peut contenir une courbe K_1', il a la dimension $\pi-1$ et on a $s_i=0$.

Le même raisonnement peut être repris pour chacun des systèmes $|L_2'|$, $|L_3'|$, ..., $|L_k'|$ et on a donc

$$s_1=s_2=\ldots=s_t=0\,.$$

On en conclut $t=p-1=p_a$. Les courbes K_1, K_2, ..., K_{p-1} sont donc des courbes isolées. Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité (et non d'ordre inférieur à p si p n'est pas premier), on peut attacher à chacune des courbes K_1, K_2, ..., K_{p-1} respectivement les racines $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

Alors, les systèmes compris dans $|L| = |2K|$ et appartenant à l'involution I_p peuvent être caractérisées par les courbes

$$2K_1, \quad K_1 + K_2, \quad K_1 + K_3, \ldots, K_1 + K_{p-2},$$
$$K_1 + K_{p-1}, \quad K_2 + K_{p-1}$$

et à ces systèmes sont attachés les nombres

$$\varepsilon^2, \quad \varepsilon^3, \quad \varepsilon^4, \ldots, \varepsilon^{p-1}, \quad \varepsilon^p = 1, \quad \varepsilon.$$

On en conclut tout d'abord que l'on a $h = k = p$ et que, de plus, le système $|K_2' + K'_{p-1}|$ est l'adjoint à $|K_1'|$.

On voit que les systèmes $|L_1'|, |L_2'|, \ldots, |L_p'|$ peuvent être rangés dans un ordre tel que les nombres qui leur sont attachés sont respectivement $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}, \varepsilon^p = 1$.

Le système $|L_1'|$ contiendra les courbes

$$K_2' + K'_{p-1}, \quad K_3' + K'_{p-2}, \ldots,$$

le système $|L_2'|$ les courbes

$$2K_1', \quad K_3' + K'_{p-1}, \ldots,$$

le système $|L'_{p-1}|$ les courbes

$$K_1' + K'_{p-2}, \quad K_2' + K'_{p-3}, \ldots.$$

Les systèmes $|L_1'|, |L_2'|, \ldots, |L'_{p-1}|$ seront donc respectivement adjoints aux courbes $K_1', K_2', \ldots, K'_{p-1}$.

L'adjoint au système $|L_1'| = |K_2' + K'_{p-1}|$ est le système $|2K_1' + K'_{p-1}|$ et par conséquent le système bicanonique de la surface Φ est

$$|L_p'| = |K_1' + K'_{p-1}| = |K_2' + K'_{p-2}| = \ldots.$$

Le bigenre de Φ est

$$P_2 = \pi = \frac{1}{p}(p^{(1)} - 1) + 1.$$

On remarquera que la surface Φ a le diviseur de Severi $\sigma = p$.

10. L'application de la méthode précédente nous a permis de déterminer deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 1$.

Supposons que F soit une surface du cinquième ordre de l'espace ordinaire et T une homographie de période cinq, ayant comme points unis les sommets du tétraèdre de référence. On peut évidemment prendre pour F une surface transformée en soi par T et ne passant pas par les sommets du tétraèdre de référence. La surface Φ est une surface du septième ordre, ayant comme droites doubles tacnodales les côtés d'un quadrilatère gauche et passant simplement par les diagonales de ce quadrilatère. La surface a les genres $p^{(1)}=2$, $p_a=p_g=0$, $P_2=2$, $P_3=4$. Les courbes bicanoniques sont découpées par les quadriques circonscrites au quadrilatère gauche et les sections planes sont les courbes tricanoniques [1].

Supposons maintenant que T soit une homographie de période huit de l'espace S_6 ayant sept points unis isolés et F l'intersection de quatre hyperquadriques, transformées en soi par cette homographie et ne passant pas par les points unis. La surface Φ a les genres $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=P_2=3$, $P_3=7$, $P_4=13$ [2].

Le bigenre d'une surface non rationnelle de genres $p_a=p_g=0$ ne peut prendre n'importe quelle valeur. En utilisant la formule de Picard liant le nombre-base ρ, le nombre ρ_0 d'intégrales doubles de seconde espèce attachées à la surface et l'irrégularité, nous avons pu prouver que l'on a $P_2 \leqslant 10$ [3].

III. Construction de surfaces irrégulières

11. Considérons une courbe algébrique L, de genre π, contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier p. Soit L' une courbe, de genre $\pi' > 0$, image de l'involution γ_p et δ le nombre de points unis de cette involution.

Par la formule de Zeuthen, on a

$$2p(\pi'-1)+(p-1)\delta=2(\pi-1)\ .$$

Nous désignerons par τ la transformation birationnelle de L en soi, génératrice de l'involution γ_p.

Soient F une surface qui représente les couples de points

(1) L. Godeaux, *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (*Rendiconti dell' Accademia dei Lincei*, 2e sem. 1931, pp. 479-481); — *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1933, pp. 26-37). Voir aussi notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles...* (*loc. cit.*).

(2) L. Godeaux, *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1949, pp. 688-693).

(3) L. Godeaux, *Les surfaces algébriques non rationnelles...* (*loc cit.*).

non ordonnés de la courbe L et F′ une surface représentant les couples de points non ordonnés de L′.

Sur la surface F, nous pouvons construire deux involutions :

Considérons un point P de F et soient P_1, P_2 le couple de points de L qu'il représente. La transformation τ fait correspondre à P_1, P_2 des points P_1', P_2' et au couple formé par ces points correspond un point P′ de F que nous faisons correspondre à P. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi qui fait passer de P à P′. Cette transformation T a évidemment la période p et engendre, sur F, une involution I d'ordre p.

Considérons d'autre part deux groupes γ_p', γ_p'' de l'involution γ_p et, sur la surface F, les points qui représentent les couples de points de L comprenant un point de γ_p' et un point de γ_p''. Nous obtenons ainsi un groupe de p^2 points. Il est évident qu'un point de ce groupe détermine le groupe et par conséquent les ∞^2 groupes analogues forment sur F une involution J, d'ordre p^2 (non cyclique).

Aux groupes γ_p', γ_p'' correspondent, sur la courbe L′, deux points Q_1', Q_2' qui sont représentés par un point Q′ de F′.

Ce point correspond au groupe de l'involution J construit plus haut et par conséquent, l'involution J a pour image la surface F′.

D'après sa construction, un groupe de l'involution J se compose de p groupes de l'involution I. Par conséquent, si Φ est une surface image de l'involution I, il correspond à l'involution J, sur Φ, une involution I′ d'ordre p dont F′ est une image.

La surface F a l'irrégularité π, la surface F′ a l'irrégularité π', par conséquent Φ est une surface irrégulière et son irrégularité est au moins égale à π' et au plus égale à π.

12. Si $p = 2$, la courbe qui représente les couples de l'involution γ_2 est unie pour l'involution I. Nous supposerons $p > 2$ et l'involution I n'a dans ce cas qu'un nombre fini de points unis, à savoir les points de F qui représentent les couples de points unis, distincts ou non, de l'involution.

Pour déterminer les éléments unis de l'involution J, considérons le système continu $\{H\}$, ∞^1, d'indice deux et de degré un, engendré par la courbe H qui représente les couples de points de L dont un point est fixe. L'enveloppe H_0 de $\{H\}$

représente les couples de points de L formés de deux points confondus.

Aux groupes de l'involution γ_p correspondent sur H_0 les groupes d'une involution que nous désignerons encore par γ_p, aucune ambiguïté n'étant possible. Soient H_1', H_2', ..., H_p' les courbes H passant par les points d'un groupe de γ_p et H_1'', H_2'', ..., H_p'' les courbes H passant par un second groupe de γ_p sur H_0. Désignons par A_{ik} le point commun aux courbes H_i', H_k''. Les p^2 points communs aux courbes H', H'' forment un groupe de l'involution J et se répartissent en p groupes de l'involution I

$$\begin{array}{l} A_{11}\,,\ A_{22}\,,\ \ldots,\ A_{pp}\,, \\ A_{12}\,,\ A_{23}\,,\ \ldots,\ A_{p1}\,, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{1p}\,,\ A_{21}\,,\ \ldots,\ A_{p,\,p-1}\,. \end{array}$$

Faisons tendre le groupe des courbes H'' vers le groupe des courbes H' et supposons précisément que la courbe H_i'' ait pour limite H_i'. Alors le groupe A_{11}, A_{22}, ..., A_{pp} tend vers le groupe de γ_p des points de rencontre des courbes H' avec H_0, tandis que les $p-1$ groupes restant tendent vers $\frac{1}{2}(p-1)$ groupes distincts, comptés chacun deux fois. En d'autres termes, le point A_{ik}, pour $i \neq k$, est un point uni de l'involution J. Le lieu de ces points, lorsque le groupe des courbes H' varie, est une courbe unie (ordinaire) de J que nous désignerons par D.

Prenons maintenant une courbe H_1 de $\{H\}$ passant par un des points unis de γ_p sur H_0. Les courbes H_1', H_2', ..., H_p' découpent sur H_1 un groupe de l'involution I qui, compté p fois, forme un groupe de l'involution J. La courbe H_1 est donc unie pour J, chacun de ses points comptant pour p.

Soient U_1, U_2, ..., U_δ les points unis de l'involution γ_p sur H_0 ; soient H_1, H_2, ..., H_δ les courbes H qui passent respectivement par ces points et U_{ik} le point commun aux courbes H_i, H_k.

La courbe unie de l'involution J se compose de la courbe D et des δ courbes H_1, H_2, ..., H_δ (chaque point de ces dernières courbes comptant pour p).

Les points unis de l'involution I sont les points U_1, U_2, ..., U_δ et les points U_{12}, U_{13}, ..., $U_{\delta-1,\,\delta}$.

Observons qu'à la courbe $D+H_0$ correspond sur la surface F' la courbe qui représente les couples de points confondus de la courbe L'.

13. On sait que M. Severi a construit un modèle projectif de la surface F de la manière suivante [1]:

Supposons la courbe L non hyperelliptique et prenons pour cette courbe la courbe canonique, d'ordre $2\pi-2$, de $S_{\pi-1}$. La surface F représente dans ces conditions la congruence des bisécantes de la courbe L. Les droites de l'espace $S_{\pi-1}$ sont représentées par les points de la variété de Grassmann W, à $2(\pi-2)$ dimensions, d'un espace linéaire Σ à $\frac{1}{2}\pi(n-1)-1$ dimensions. La congruence des cordes de la courbe L est représentée sur W par une surface F, d'ordre $(\pi-1)(4\pi-9)$, dont les sections hyperplanes C constituent le système canonique.

La surface F a les genres

$$p_g=\frac{1}{2}\pi(\pi-1),\quad p_a=\frac{1}{2}\pi(\pi-1)-\pi,$$
$$p^{(1)}=(\pi-2)(4\pi-5).$$

Sur la courbe canonique L, la transformation τ est déterminée par une homographie que nous continuerons à désigner par τ. Cette homographie possède un certain nombre t d'axes ponctuels que nous désignerons par σ_0, σ_1, ..., σ_t. Nous désignerons par s_0, s_1, ..., s_t leurs dimensions respectives.

On sait qu'à la série canonique de la courbe L' correspond sur la courbe L une série qui, jointe aux points unis de γ_p, comptés chacun $p-1$ fois, donne une série comprise dans la série canonique de L. Il en résulte qu'il y a certainement un axe de l'homographie τ, par exemple σ_0, qui ne rencontre pas L et qui a la dimension $s_0=\pi'-1$.

A l'homographie τ correspond dans Σ une homographie T de même période p, transformant F en soi et engendrant sur cette surface l'involution I. Cette homographie T possède un certain nombre d'axes ponctuels. L'un de ceux-ci, Σ_0, coupe la variété de Grassmann W suivant les points qui représentent les droites appartenant à l'espace σ_0. Les hyperplans de Σ qui passent par les axes ponctuels de T distincts de Σ_0, coupent F suivant des courbes canoniques C_0 parmi lesquelles se trouvent les transformées des courbes canoniques de la surface F'.

[1] F. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (*Atti dell' Accademia di Torino*, 1902-1903, pp. 185-200).

Il en résulte que le système linéaire partiel $|C_0|$ est le transformé du système canonique $|\Gamma_0|$ de Φ. On peut donc construire ce dernier système.

14. Nous pouvons supposer (¹) que l'homographie τ de $S_{\pi-1}$ ait p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$. Nous allons déterminer les axes ponctuels de l'homographie T dans l'espace Σ.

Les droites unies de l'espace $S_{\pi-1}$ seront les droites des espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ et les droites joignant des points de deux de ces espaces.

Attachons aux espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ respectivement les nombres $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ suivant la méthode habituelle, ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Si y est un point de σ_i et z un point de σ_k, les coordonnées pluckériennes de la droite yz se reproduiront, dans T, multipliées par ε^{i+k}. Cette remarque est aussi valable lorsque les espaces σ_i et σ_k coïncident.

Cela étant, représentons par (σ_i, σ_k) une des droites yz considérées. Les coordonnées des droites (σ_0, σ_0), (σ_1, σ_{p-1}), (σ_2, σ_{p-2}), ... se reproduiront multipliées par $1 = \varepsilon^p$, et dans Σ, donneront des points de W appartenant à un axe Σ_0 de T, auquel nous attacherons le nombre 1.

Les coordonnées des droites (σ_0, σ_1), (σ_2, σ_{p-1}), (σ_3, σ_{p-2}), ... se reproduiront multipliées par ε et les points qui les représentent sur W appartiendront à un axe Σ_1 de T, auquel nous attacherons le nombre ε.

Et ainsi de suite. On obtiendra ainsi dans Σ des points des p axes $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ de T.

Nous poserons $p = 2\nu + 1$. Les droites $(\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1})$ seront représentées par des points de Σ_0.

Le nombre de droites (σ_0, σ_0) linéairement indépendantes est égal à $\frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1)$. Celui des droites (σ_1, σ_{p-1}) linéairement indépendantes est égal à $(s_1 + 1)(s_{p-1} + 1)$ et ainsi de suite. Par conséquent, si r_0 est la dimension de Σ_0, on a

$$r_0 \geqslant \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1) + (s_1 + 1)(s_{p-1} + 1) + \ldots \\ + (s_\nu + 1)(s_{\nu+1} + 1) - 1 . \qquad (1)$$

(¹) P. Defrise, *Les courbes multiples abéliennes avec points de diramation* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1938, pp. 372-388).

Nous désignerons par r_1, r_2, ..., r_{p-1} les dimensions des espaces Σ_1, Σ_2, ..., Σ_{p-1}. On aura

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \geqslant \pi'(s_1+1)+(s_2+1)(s_{p-1}+1)+\dots \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}s_{\nu+1}(s_{\nu+1}+1)-1\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{p-1} \geqslant \pi'(s_{p-1}+1)+(s_1+1)(s_{p-2}+1)+\dots \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}s_\nu(s_\nu+1)-1\,. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Nous avons, d'après la théorie des homographies,

$$\pi'-1+s_1+s_2+\dots+s_{p-1}+p=\pi\,, \quad (3)$$

$$r_0+r_1+\dots+r_{p-1}+p=\frac{1}{2}\pi(\pi-1)\,. \quad (4)$$

Or, des inégalités (1) et (2), on déduit

$$r_0+r_1+\dots+r_{p-1}+p\geqslant\frac{1}{2}\pi(\pi-1)\,.$$

Le signe d'égalité est donc seul valable dans les relations (1) et (2).

On en déduit en particulier que le genre géométrique p_g' de Φ est

$$p_g'=\frac{1}{2}\pi'(\pi'-1)+(s_1+1)(s_{p-1}+1)+\dots \\ +(s_\nu+1)(s_{\nu+1}+1)\,.$$

15. Le calcul du genre arithmétique de Φ est moins simple, car il fait intervenir la structure des points unis de l'involution I.

Désignons par U_1', U_2', ..., U_δ' les points unis de l'involution γ_p sur la courbe L de $S_{\pi-1}$, par t_1, t_2, ..., t_δ les tangentes à cette courbe en ces points. Chacun des points U_1', U_2', ..., U_δ' appartient à l'un des espaces σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1} ; nous ferons l'hypothèse que celui de ces espaces qui contient le point U_i' ne contient pas la tangente t_i à la courbe en ce point.

Observons que les hyperplans passant par σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1} ont un contact d'ordre $p-1$ avec la courbe L aux points U_1', U_2', ..., U_δ', par conséquent ces hyperplans contiennent les tangentes à cette courbe aux points unis. Il en résulte que la tangente au point U_i', point qui appartient à un des espaces σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1}, s'appuie en un point sur un autre de ces espaces.

Cela étant, les points unis de l'involution I sur la surface F seront de trois catégories :

1° Points unis U_{ik} représentant une corde de L joignant deux des points unis U_1', U_2', ..., U_δ' appartenant à un même axe ponctuel de τ ;

2° Points unis U_{ik} joignant deux des points U_1', U_2', ..., U_δ' appartenant à deux axes ponctuels distincts de τ ;

3° Points unis U_1, U_2, ..., U_δ représentant respectivement les tangentes t_1, t_2, ..., t_δ à L aux points U_1', U_2', ..., U_δ.

Nous allons examiner ces trois hypothèses.

Supposons, pour fixer les idées, que les points U_1', U_2' appartiennent à l'espace σ_1 et considérons le point U_{12} de F. Aux cordes de L appartenant à un complexe linéaire contenant la droite $U_1'U_2'$, correspondent sur F les points d'une courbe canonique C passant par U_{12}. En particulier, aux cordes de F s'appuyant sur un espace $S_{\pi-3}$ rencontrant $U_1'U_2'$ correspondent sur F les points d'une courbe C. On peut évidemment trouver, d'une infinité de manières, un espace $S_{\pi-3}$ uni pour l'homographie τ, s'appuyant sur $U_1'U_2'$ en un point quelconque et contenant une corde de L infiniment voisine de $U_1'U_2'$, mais d'ailleurs quelconque. On en conclut que les points de F infiniment voisins de U_{12} sont unis pour T. En d'autres termes, les points unis de la première catégorie sont de première espèce.

Supposons maintenant que le point U_1' appartienne à σ_1 et le point U_2' à σ_2. Le raisonnement précédent ne peut plus être repris, car la droite $U_1'U_2'$ ne contient que deux points unis pour τ et un espace $S_{\pi-3}$ uni pour τ, rencontrant la droite, passe nécessairement par U_1' ou par U_2'.

Les cônes projetant L de U_1' ou de U_2' sont unis pour τ et par conséquent, il n'existe que deux points de F, infiniment voisins de U_{12}, unis pour T. Les points de la seconde catégorie sont des points unis de seconde espèce.

Supposons enfin que le point U_1' appartienne à σ_1 et que la tangente t_1 à L en ce point s'appuie sur σ_2 en un point P_1. Un espace $S_{\pi-3}$ uni pour τ et appuyant sur t_1 doit passer par U_1'

ou par P_1. Les points de F infiniment voisins de U_1 ne sont donc pas en général unis pour T. Le cône projetant L de U_1' est uni pour τ et à la droite de ce cône infiniment voisine de t_1 correspond sur F un point uni pour T, infiniment voisin de U_1. D'autre part, si nous choisissons, ce qui est toujours possible, un espace $S_{\pi-3}$ uni pour τ et passant par P_1, la corde de L s'appuyant sur cet espace et infiniment voisine de t_1 est unie pour τ ; il lui correspond un second point de F, infiniment voisin de U_1, uni pour T. Les points unis de la troisième catégorie sont de seconde espèce.

16. Le genre géométrique de la surface F' est égal à $\frac{1}{2}\pi'(\pi'-1)$; il est donc inférieur au genre géométrique p_g' de Φ. Par conséquent, si l'on projette la surface F à partir de l'espace de dimension minimum contenant $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$ sur Σ_0, on obtient un modèle projectif de Φ, simple, dont les sections hyperplanes forment le système canonique.

On sait qu'à un point uni de première espèce de I correspond sur la surface Φ un point de diramation multiple d'ordre p pour cette surface, le cône tangent étant rationnel et irréductible. Ce point de diramation est équivalent à une courbe rationnelle de degré $-p$, rencontrée en $p-2$ points par une courbe canonique de Φ. Par conséquent, les points unis de première espèce doivent appartenir aux transformées sur F des courbes canoniques de Φ. C'est bien ce qui a lieu, puisque les points unis de première espèce appartiennent aux espaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$.

Les points unis de I appartenant à Σ_0 ont pour homologues sur Φ des points de diramation sans influence sur le système canonique de cette surface. Ces points de diramation sont donc nécessairement des points unis symétriques [1], équivalents à $p-1$ courbes rationnelles de degré ... .

Aux points unis de seconde espèce qui appartiennent aux espaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$, correspondent sur Φ des points de diramation qui ont une influence sur le système canonique et qui sont par conséquent équivalents à des ensembles de courbes rationnelles dont l'une au moins a un degré inférieur à -2.

La détermination de la structure des points de diramation

[1] L. Godeaux, *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Revista de la Universidad de Tucuman*, 1940, pp. 283-291).

semble difficile dans le cas général. Nous avons pu étudier quelques cas particuliers [1].

Lorsque l'involution γ_p sur la courbe L est dépourvue de points unis et qu'il en est par conséquent de même pour l'involution I, on trouve que la surface Φ a l'irrégularité π'.

[1] L. Godeaux, *Sur la construction d'une surface d'irrégularité trois* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1943, pp. 815-822); — *Sur la construction d'une surface d'irrégularité deux* (*ibid.*, 1944, pp. 11-18); — *Construction de surfaces algébriques irrégulières* (*ibid.*, 1946, pp. 427-440); — *Sur quelques surfaces algébriques irrégulières* (*ibid.*, 1946, pp. 457-464); — *Recherches sur la construction de surfaces algébriques irrégulières* (*ibid.*, 1947, pp. 22-32, 33-38, 67-76); — *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari* (*Rendiconti Accademia Naz. dei Lincei*, juin 1949, pp. 694-696).