Sur les variétés de Segre généralisées

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note récente, M. Bompiani (1) a considéré certaines variétés qui généralisent à la fois les variétés de Veronese et les variétés de Segre. Voici quelques années, nous avions considéré quelques cas particuliers de ces variétés, sous le nom de variétés mixtes de Segre-Veronese (2). Nous avons appris depuis que M. Terracini avait également considérées ces variétés dans le but de déterminer une base pour les hypersurfaces contenant une telle variété (3). Nous nous proposons, dans cette courte note, de revenir sur la théorie de ces variétés; avec M. Terracini nous les appellerons *variétés de Segre généralisées*.

1. — Considérons k espaces linéaires $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k)}$ dont les dimensions sont respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_k$. La variété de Segre généralisée représente les groupes de k points formés d'un point de $S^{(1)}$ compté n_1 fois, d'un point de $S^{(2)}$ compté n_2 fois, ..., d'un point de $S^{(k)}$ compté n_k fois. Nous l'avions définie d'une manière équivalente que nous allons rappeler.

Désignons par Σ une liaison ponctuelle entre les espaces $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k)}$ représentée en égalant à zéro une forme algébrique de degré n_1 par rapport aux coordonnées des points de $S^{(1)}$, de degré n_2 par rapport aux coordonnées des points de $S^{(2)}$, ..., de degré n_k par rapport aux coordonnées des points de $S^{(k)}$. Une telle forme contient

$$\binom{n_1 + r_1}{r_1}\binom{n_2 + r_2}{r_2} \cdots \binom{n_k + r_k}{r_k} = R + 1$$

coefficients.

Considérons l'ensemble des liaisons ponctuelles analogues à Σ et rapportons les projectivement aux hyperplans d'un espace

(1) *Varietà prodotto topologico di spazi multipli.* (Rend. Accad. Naz. Lincei, mais 1947, pp. 493-497).

(2) *Variétés mixtes de Segre-Veronese* (Bull. de la Soc. des Sciences de Liége, 1942, pp. 74-83).

(3) *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre* (Rend. Accad. Naz. Lincei, 2e sem. 1921, pp. 95-100).

linéaire S_R à R dimensions. Nous obtenons ainsi les équations paramétriques d'une variété V à

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$$

dimensions, qui est la variété de Segre généralisée.

2. — Une hypersurface d'ordre n_1 de l'espace $S^{(1)}$ est représentée par une équation, qui contient

$$\binom{n_1 + r_1}{r_1} = R_1 + 1$$

termes. Si nous rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace $\Sigma^{(1)}$ à R_1 dimensions, nous obtenons la variété de Veronese généralisée, Ω_1, qui représente les points de $S^{(1)}$ comptés n_1 fois.

La variété Ω_1 est d'ordre $n_1{}^{r_1}$.

Posons

$$\binom{n_i + r_i}{r_i} = R_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

En opérant sur les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(k)}$ comme sur $S^{(1)}$, nous obtenons des variétés de Veronese généralisées Ω_2, d'ordre $n_2{}^{r_2}$, située dans un espace linéaire $\Sigma^{(2)}$ à R_2 dimensions, Ω_3, d'ordre $n_3{}^{r_3}$, située dans un espace linéaire $\Sigma^{(3)}$ à R_3 dimensions, ..., Ω_k, d'ordre $n_k{}^{r_k}$, située dans un espace linéaire $\Sigma^{(k)}$, à R_k dimensions.

Une liaison ponctuelle Σ devient une forme k-linéaire par rapport aux coordonnées d'un point de Ω_1, d'un point de Ω_2, ..., d'un point de Ω_k. Il en résulte que la variété de Segre généralisée V représente les groupes de k points formés d'un point de Ω_1, d'un point de Ω_2, ..., d'un point de Ω_k.

3. — Considérons la variété de Segre W représentant les groupes de k points pris un dans chacun des espaces $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, ..., $\Sigma^{(k)}$. Cette variété appartient à un espace à

$$(R_1 + 1)(R_2 + 1) \ldots (R_k + 1) - 1 = R$$

dimensions. Elle a la dimension

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_t = R_o$$

et est d'ordre

$$N = \frac{R_0 !}{R_1 ! \, R_2 ! \dots R_k !}.$$

La variété V est évidemment tracée sur la variété W.

Pour déterminer l'ordre de la variété V, considérons l'intersection de cette variété avec r hyperplans de S_R, nombre égal à l'ordre cherché. Ce nombre ne change pas si les hyperplans considérés correspondent à des liaisons dégénérées, c'est-à-dire à des liaisons ponctuelles dont chacune est représentée en égalant à zéro le produit de k formes linéaires par rapport aux coordonnées des points de $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, ..., $\Sigma^{(k)}$.

Les facteurs intervenant dans l'équation d'une liaison ponctuelle dégénérée représentent, égalés à zéro, k hyperplans situés respectivement dans les espaces $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, ..., $\Sigma^{(k)}$. Un point d'un de ces hyperplans, joint à $k - 1$ points pris un dans chacun des autres espaces, donne un point de W situé dans l'hyperplan de S_R représentant la liaison. Cela étant, partageons les r liaisons choisies en k groupes comprenant respectivement r_1, r_2, ..., r_k liaisons. Dans $\Sigma^{(1)}$, les hyperplans correspondent aux r_1 premières liaisons coupent Ω_1 suivant $n_1^{r_1}$ points; dans $\Sigma^{(2)}$, les hyperplans correspondant aux r_2 liaisons suivantes coupent Ω_2 en $n_2^{r_2}$ points; ... ; dans $\Sigma^{(k)}$, les hyperplans correspondant aux r_k dernières liaisons coupent Ω_k en $n_k^{r_k}$ points. On obtient ainsi

$$n_1^{r_1} \, n_2^{r_2} \dots n_k^{r_k}$$

groupes de k points de $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, ..., $\Sigma^{(k)}$ ou mieux de Ω_1, Ω_2, ..., Ω_k, représentés par des points de V situés dans les hyperplans représentés par les r liaisons considérées.

La répartition des r liaisons ponctuelles choisies en k groupes de l'espèce indiquée peut se faire de

$$\frac{r !}{r_1 ! \; r_2 ! \dots r_k !}$$

manières. On en conclut que l'ordre de V est

$$n = \frac{r !}{r_1 ! \; r_2 ! \dots r_k} \, n_1^{r_1} \, n_2^{r_2} \dots n^{r_k},$$

nombre obtenu par M. Bompiani par une autre méthode.

4. — La variété V contient des systèmes de variétés de Segre généralisées que l'on obtient en considérant les variétés de Segre tracées sur W. [1]

Représentons par

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \ldots & n_k \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_k \end{pmatrix}$$

la variété V.

Si l'on fixe h points des variétés $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ par exemple, on obtient $\infty^{r_1+r_2+\ldots r_h}$ variétés de Segre généralisées

$$\begin{pmatrix} u_1 & n_2 & \ldots & n_h & n_{h+1} & \ldots & n_k \\ o & o & \ldots & o & r_{h+1} & \ldots & r_k \end{pmatrix}$$

formant un système tel qu'un point de V appartient à une seule variété.

On obtient un système complémentaire analogue

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \ldots & n_h & n_{h+1} & \ldots & n_k \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_h & o & \ldots & o \end{pmatrix}$$

et deux variétés de chacun de ces systèmes sont unisécantes.

Les homographies de S_R qui conservent la variété V proviennent évidemment d'homographies des espaces $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(k)}$ conservant respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ et par conséquent d'homographies de $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k)}$.

5. — Arrêtons-nous sur le cas particulier où l'on a $k = 2$, $r_1 = r_2 = 2$, $n_1 = n_2 = 2$. Dans ces hypothèses, Ω_1 et Ω_2 sont des surfaces de Veronese appartenant à des espaces linéaires $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$ à cinq dimensions. La variété de Segre W appartient à un espace S_{35} à 35 dimensions; elle a la dimension 10 et l'ordre 252; nous la désignerons par W_{10}^{252}.

La variété de Segre généralisée V a la dimension 4 et l'ordre 96; nous la désignerons par V_4^{96}.

Les cordes de la surface de Veronese Ω_1 (ou Ω_2) engendrent une hypersurface $M^{(1)}$!(ou $M^{(2)}$) de $\Sigma^{(1)}$ (ou $\Sigma^{(2)}$) du troisième ordre. Désignons par M la variété, tracée sur W_{10}^{252}, qui représente les couples de points de $M^{(1)}, M^{(2)}$. Pour déterminer l'ordre

---

[1] Voir par exemple le tome I de notre *Géométrie algébrique* (Liége Sciences et Lettres, 1948), pp. 208, 209.

de M, cherchons le nombre de ses intersections avec huit hyperplans de S_{35} correspondant à huit liaisons ponctuelles dégénérées. On obtient ainsi, dans $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, huit hyperplans que l'on doit partager en deux groupes de quatre. On en déduit que la variété M est d'ordre $\binom{8}{4} \,.\, 9 = 630$; nous la désignerons par M_8^{630}.

Les points de M_8^{630} qui représentent les couples de points formés d'un point de Ω_1 et d'un point de $M^{(2)}$ forment une variété $L^{(1)}$, à six dimensions, contenant V_4^{96}. De même les couples de points formés d'un point de $M^{(1)}$ et d'un point de Ω_2 sont représentés par les points d'une variété $L^{(2)}$, à six dimensions. Il est facile de voir, en considérant les intersections d'une des variétés $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ avec six hyperplans représentant des liaisons ponctuelles dégénérées, que ces variétés sont d'ordre $12\binom{6}{2}=180$ De plus, ces variétés sont doubles pour la variété M_8^{630}.

On sait que la surface Ω_1 est double pour $M^{(1)}$ et que Ω_2 est double pour $M^{(2)}$; on en conclut aisément que la variété V_4^{96} est quadruple pour la variété M_8^{630}.

Soient s_1 une corde de Ω_1 et s_2 une corde de Ω_2. Les couples de points de s_1, s_2, sont représentés dans S^{35} par les points d'une quadrique Q appartenant à M_8^{630}, rencontrant V_4^{96} en quatre points et chacune des variétés $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ suivant deux droites.

Si en particulier s_1 est tangente à Ω_1 et s_2 à Ω_2, la quadrique Q est tangente à V_4^{96} et touche chacune des variétés $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ suivant une droite.

Soient γ_1 une conique de Ω_1 et γ_2 une conique de Ω_2. Les couples de points de γ_1, γ_2 sont représentés par les points d'une surface du huitième ordre, F^8, appartenant à V_4^{96}. Les couples de points des plans de γ_1, γ_2 sont représentés par les points d'une variété V_4^6 appartenant à M_8^{630}, coupant V_4^{96} suivant la surface F^8 et chacune des variétés $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ suivant des variétés à trois dimensions, d'ordre six.

Et ainsi de suite.

Liége, le 31 décembre 1948.

(3401) Imprimerie Etablissements Ceuterick, rue V. Decoster, Louvain