Remarque sur les tétraèdres de Moebius

par LUCIEN GODEAUX

Soient $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ deux tétraèdres de Moebius, inscrits et circonscrits l'un à l'autre. La face $B_2B_3B_4$ du second contient le point A_1 et la face $A_2A_3A_4$ du premier passe par le point B_1, et ainsi de suite.

J. Neuberg [1] a remarqué que si l'on prend l'un de ces tétraèdres, par exemple le premier, comme tétraèdre de référence, les équations des faces du second ont pour coefficients les termes d'un déterminant hémisymétrique. Les équations des faces du second tétraèdre peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned}
\beta_1 &\equiv \phantom{-a_{12}x_1} \quad a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0\,,\\
\beta_2 &\equiv -a_{12}x_1 \phantom{- a_{23}x_2} + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0\,,\\
\beta_3 &\equiv -a_{13}x_1 - a_{23}x_2 \phantom{+ a_{33}x_3} + a_{34}x_4 = 0\,,\\
\beta_4 &\equiv -a_{14}x_1 - a_{24}x_2 - a_{34}x_3 \phantom{+ a_{44}x_4} = 0\,.
\end{aligned}$$

Considérons l'homographie H, d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4\,.$$

Les formules inverses sont

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= \phantom{a_{34}x'_1} - a_{34}x'_2 + a_{24}x'_3 - a_{23}x'_4\,,\\
\rho x_2 &= a_{34}x'_1 \phantom{+ a_{14}x'_2} - a_{14}x'_3 + a_{13}x'_4\,,\\
\rho x_3 &= a_{24}x'_1 + a_{14}x'_2 \phantom{+ a_{12}x'_3} - a_{12}x'_4\,,\\
\rho x_4 &= a_{23}x'_1 - a_{13}x'_2 + a_{12}x'_3\,.
\end{aligned}$$

[1] *Sur les tétraèdres de Mœbius* (Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1884, 2e série, tome XI). Au sujet des tétraèdres de Mœbius on peut consulter nos *Leçons de Géométrie projective*, pp. 223-224 (Liège, Thone et Paris, Hermann, 1933).

Représentons par β'_1, β'_2, β'_3, β'_4 les seconds membres des équations précédentes, de manière que les équations de H^{-1} puissent s'écrire

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 : \beta'_4 \ .$$

Les coefficients de β'_1, β'_2, β'_3, β'_4 sonr les termes d'un déterminant hémisymétrique et par conséquent ce sont les faces d'un tétraèdre $B'_1B'_2B'_3B'_4$ inscrit et circonscrit au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Les sommets du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ ont respectivement pour coordonnées $B_1(0,\ a_{34},\ -a_{24},\ a_{23})$, $B_2(a_{34},\ 0,\ -a_{14},\ a_{13})$, $B_3(a_{24},\ -a_{14},\ 0,\ a_{12})$, $B_4(a_{23},\ -a_{13},\ a_{12},\ 0)$ et les sommets du tétraèdre $B'_1B'_2B'_3B'_4$, $B'_1(0, a_{12}, a_{13}, a_{14})$, $B'_2(-a_{12},\ 0,\ a_{23},\ a_{24})$, $B'_3(-a_{13},\ -a_{23},\ 0,\ a_{34})$, $B'_4(-a_{14},\ -a_{24},\ -a_{34},\ 0)$.

On en conclut que les tétraèdres $B_1B_2B_3B_4$ et $B'_1B'_2B'_3B'_4$ sont polaires réciproques par rapport à la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \ ,$$

par rappoıt à laquelle le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est autopolaire.

Si T_1, T_2 *sont deux tétraèdres de Moebius, l'inverse de l'homographie qui fait correspondre* T_1 *à* T_2, *fait correspondre à* T_1 *un tétraèdre* T'_2 *qui, avec* T_1, *forme un couple de tétraèdre de Moebius. Les tétraèdres* T_2, T'_2 *sont polaires par rapport à une quadrique pour laquelle* T_1 *est autopolaire.*

On peut encore observer que dans le plan $x_1 = 0$ par exemple, la droite $x_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ est la polaire trilinéaire du point B'_1 par rapport au triangle $A_2A_3A_4$ et $x_1 = 0$, $\beta'_4 = 0$, la polaire trilinéaire du point B_1.

Les tétraèdres $B_1B_2B_3B_4$ et $B'_1B'_2B'_3B'_4$ coïncident si l'on a

$$\frac{a_{12}}{-a_{34}} = \frac{a_{13}}{a_{24}} = \frac{a_{14}}{-a_{23}} = \pm 1 \ .$$

Liège, le 18 janvier 1951.