Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 avril 1949.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Seconde note*).

Une involution cyclique I_p d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, étant donnée sur une surface algébrique F, nous fixons l'attention sur un point uni dans le domaine duquel l'homographie déterminée par l'involution est engendrée par

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \epsilon^{\alpha-1}\mu,$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Dans la première note (¹), nous avons étudié la singularité d'une surface image Φ de l'involution au point de diramation correspondant dans le cas où le cône tangent à cette surface en ce point se scinde en deux parties. Dans le cas général, nous avons construit un système linéaire $|C_0'|$, appartenant à l'involution, ayant un point multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ au point uni considéré, les tangentes étant fixes et confondues avec deux droites fixes. On a $\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p$. Si β est un entier positif compris entre 1 et p, tel que $\alpha\beta - 1$ soit divisible par p, nous avons $\mu_1 + \beta\lambda_1 = kp$. Le cas étudié dans notre première note correspond à $k = 1$. Nous supposons actuellement $k > 1$. Dans ces conditions, le cône tangent à la surface Φ au point de diramation considéré se scinde en plus de deux parties.

Projetons Φ du point de diramation sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_1 la surface obtenue. Le domaine du point

(¹) BULLETIN DE L'ACADÉMIE, 1949, pp. 15-30.

de diramation sur Φ équivaut à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \quad \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t. \sigma_a,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. Les courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$ sont de degré virtuel — 2 et représentent les domaines du second, troisième, ... ordre du point de diramation. Nous nous plaçons dans le cas où ces courbes manquent, c'est-à-dire dans le cas où les courbes τ_h, σ_a ont en commun un point simple pour la surface Φ_1. Nous montrons que dans ce cas, on a $h = 1$. Le cône tangent à Φ au point de diramation se scinde alors en trois cônes.

Dans la note suivante, nous étudierons le cas où les courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$ existent effectivement, c'est-à-dire le cas où le point commun à τ_h, σ_a est double pour la surface Φ_1 et nous montrerons que l'on a encore $h = 1$.

Nous terminons cette seconde note en traitant rapidement quelques exemples.

12. Reprenons la surface F contenant une involution I_p, cyclique d'ordre premier $p = 2\nu + 1$ et soit A un point uni isolé dans le voisinage duquel la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution, détermine l'homographie

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \epsilon^{a-1} \mu, \tag{1}$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Désignons par β l'entier positif inférieur à p tel que

$$a\beta \equiv 1, \qquad (\text{mod. } p),$$

de telle sorte que l'homographie (1) puisse également se représenter par

$$\lambda' : \mu' = \epsilon_1^{\beta-1} \lambda : \mu,$$

où $\epsilon_1 = \epsilon^a$.

Soit λ_1, μ_1 la solution en nombres entiers positifs de la congruence

$$\lambda + a\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum. Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes étant confondues avec la droite a_1 et μ_1 avec la droite a_α.

Les courbes C'_0 et C_α ont en commun une suite de $\alpha - 1$ points fixes, $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha,\alpha-1}$, infiniment voisins successifs de A, dont le premier est sur a_α, unis pour l'involution, le dernier $A_{\alpha,\alpha-1}$ étant uni parfait. Ces points sont tous multiples d'ordre μ_1 pour les courbes C'_0.

Supposons que nous ayons

$$\mu_1 + \beta\lambda_1 = kp, \qquad k > 1.$$

Les courbes C'_0 et C_1 ont en commun une suite de points fixes $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\beta-1}$, infiniment voisins successifs de A, unis par l'involution, le dernier étant uni parfait. Un certain nombre de ces points ont pour les courbes C'_0 une multiplicité inférieure à λ_1, sans quoi les courbes C_1 rencontreraient les courbes C'_0 en plus de p points confondus en A. Sur une courbe C'_0, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches superlinéaires passant par un certain nombre de points fixes, infiniment voisins successifs de certains points de la suite $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\beta-2}$; ces suites de points fixes, qui sont unis pour l'involution, se terminent par des points unis parfaits. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_h$ ces points et par $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ leurs multiplicités pour les courbes C'_0. Soit en outre λ'_1 la multiplicité du point $A_{1,\beta-1}$ pour les mêmes courbes.

Rapportons projectivement les courbes C'_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 1$ dimensions. Il correspond à la surface F une surface Φ_1, image de l'involution I_p, dont nous désignerons les sections hyperplanes par Γ'_0. Aux domaines des points unis parfaits $A_{1,\beta-1}, A_{\alpha,\alpha-1}$, il correspond sur Φ_1 des courbes rationnelles σ_1, σ_α, respectivement d'ordres λ'_1, μ_1.

Aux domaines des points unis parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_h$ sur F correspondent sur Φ_1 des courbes rationnelles $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$, respectivement d'ordres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$. On peut d'ailleurs, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, supposer que les courbes $\sigma_1, \sigma_\alpha, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ sont normales.

13. Appelons Γ''_0 les courbes qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C''_0. Elles sont découpées sur la surface par les hyperplans passant par un point A'_1.

Les courbes C''_0 ont en A la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$. Si le point A'_1 n'appartenait pas à la courbe σ_a, les courbes C''_0 auraient en $A_{a,a-1}$ la multiplicité μ_1 et par conséquent en $A_{a,a-2}$, $A_{,a-a3}$, ..., A_{a1} une multiplicité au moins égale à μ_1. Mais alors, les courbes C_a rencontreraient les courbes C''_0 en plus de p points confondus en A, ce qui est impossible. Par conséquent, le point A'_1 appartient à la courbe σ_a.

Supposons maintenant que le point A'_1 n'appartienne à aucune des courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$. Alors, les courbes C''_0 ont la même multiplicité que les courbes C'_0 aux points $A_{1,\beta-1}$, $P_1, P_2, \ldots, P_h$; par conséquent, les courbes C''_0 ont aux points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\beta-2}$ des multiplicités au moins égales à celles des courbes C'_0. Mais alors, les courbes C_1 rencontreraient les courbes C''_0 en plus de p points confondus en A, ce qui est impossible. Par conséquent, le point A'_1 appartient à l'une des courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$.

Le point A'_1 est au plus double pour la surface Φ. En effet, si nous désignons par Φ l'image de l'involution I_p dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0 et par A' le point de diramation de Φ homologue du point A, la surface Φ_1 est projectivement identique à la projection de Φ, à partir de A', sur un hyperplan de l'espace ambiant. Il en résulte que le cône tangent à Φ en A', qui peut, par une homographie, être amené à coïncider avec un cône projetant d'un point extérieur les courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \sigma_a$, a une génératrice double passant par A'_1.

Si le point A'_1 est double pour Φ_1, il est équivalent à une suite de courbes rationnelles.

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t,$$

de degré — 2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. De plus, la courbe ρ_t rencontre σ_a en un point et la courbe ρ_1 rencontre en un point celle des courbes $\sigma_1. \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ qui passe par le point A'_1.

14. Nous allons supposer que le point A_1' appartient à la courbe σ_1.

Comme nous l'avons déjà remarqué dans nos travaux antérieurs, on peut supposer que le système $|C_0'|$ contient des courbes particulières ne passant pas par $P_1, P_2, \ldots, P_h$, et ayant la multiplicité λ_1 aux points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\beta-1}$. A ces courbes correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0' particulières, rencontrant σ_1 en λ_1 points, mais ne rencontrant plus les courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$. S'il en était autrement, il suffirait de remplacer le système $|C|$ par le système $|(\lambda_1 + \mu_1)C|$. Le système $|C_0'|$ serait alors remplacé par le système $|(\lambda + \mu_1 - 1)C_0 + C_0'|$ et contiendrait les courbes $\lambda_1 C_1 + \mu_1 C_a$, qui satisfont aux conditions requises.

On obtient les courbes Γ'_0 particulières envisagées en obligeant les courbes Γ_0' générales à contenir un certain nombre de fois la courbe σ_1 (voir notre mémoire des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1948, p. 202 et suiv.).

Cela étant, supposons que la courbe σ_1 passe par le point A_1'. Cela signifie que cette courbe rencontre en un point la courbe σ_a si A_1' est simple pour Φ_1, ou la courbe ρ_1, si A_1' est double pour Φ_1.

Les courbes Γ_0' particulières envisagées doivent être découpées sur Φ_1 par des hyperplans contenant la courbe σ_1; mais alors, ces hyperplans passent par le point A_1' et les courbes en question seraient des courbes Γ_0'', ce qui est absurde. On en conclut que le point A_1' appartient à l'une des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$.

La singularité du point A' pour la surface Φ est donc équivalente à un ensemble de courbes rationnelles

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{i-1}, \sigma_1, \tau_i, \ldots, \tau_h, \rho_1, \ldots, \rho_t, \sigma_a,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. On a $i \leqslant h$. Le cas où A_1' est simple pour la surface Φ_1 s'obtient en supposant $t = 0$.

15. Nous allons supposer en premier lieu $t > 1$, c'est-à-dire que le point A_1' est double pour la surface Φ_1'.

Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \tau_1 + \ldots + \tau_{i-1} + \sigma_1 + \tau_i + \ldots + \tau_h + \rho_1 + \ldots + \rho_t + \sigma_a .$$

Supposons en outre $i > 1$. Les courbes Γ'_0 particulières, rencontrant la courbe σ_1 en λ_1 points, seront obtenues en faisant passer les hyperplans par les courbes $\tau_2, \dots, \tau_{i-1}, \sigma_1, \tau_i, \dots, \tau_{h-1}$; elles seront donc de la forme

$$\Gamma'_0 - m_2\tau_2 - \dots - m_{i-1}\tau_{i-1} - m\sigma_1 - m_i\tau_i - \dots - m_{h-1}\tau_{h-1}.$$

Écrivons, pour déterminer les entiers m, que les courbes $\tau_1, \dots, \tau_h$ ne rencontrent pas cette courbe. Observons que les courbes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}, \sigma_1, \tau_i, \dots, \tau_h$ ont pour degrés virtuels respectivement $-(\nu_1 + 1), -(\nu_2 + 2), \dots, -(\nu_{i-1} + 2), -(\lambda'_1 + 2), -(\nu_i + 2), \dots, -(\nu_h + 2)$. Nous avons

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \nu_1 - m_2 = 0, \\ \nu_2 + m_2(\nu_2 + 2) - m_3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \nu_{i-} - m_{i-2} + m_{i-1}(\nu_{i+1} + 2) - m = 0. \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \nu_i - m + m_i(\nu_i + 2) - m_{i+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \nu_{h-1} - m_{h-2} + m_{h-1}(\nu_{h-1} + 2) = 0, \\ \nu_h - m_{h-1} = 0. \end{array}\right.$$

Les valeurs de m fournies par les équations (1) et (2) devront être égales.

D'autre part, en exprimant que les courbes Γ'_0 particulières envisagées coupent la courbe σ_1 en λ_1 points, on a

$$\lambda'_1 - m_{i-1} + m(\lambda'_1 + 2) - m_i = \lambda_1.$$

Envisageons maintenant les courbes Γ''_0 ; elles satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{i-1} + \sigma_1 + \tau_i + \dots + \tau_h + 2(\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_t) + \sigma_a.$$

Les courbes Γ''_0 qui rencontrent σ_1 en λ_2 points seront données par

$$\Gamma''_0 - m'_2\tau_2 - \dots - m'_{i-1}\tau_{i-1} - m'\sigma_1 - m'_i\tau_i - \dots - m'_{h-1}\tau_{h-1} - \tau_h.$$

Pour déterminer les entiers m', on opérera comme précédemment. On aura

$$(1')\quad \begin{cases} \nu_1 - m'_1 = 0, \\ \nu_2 + m'_2(\nu_2 + 2) - m'_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_{i-1} - m'_{i-2} + m'_{i-1}(\nu_{i-1} + 2) - m' = 0. \end{cases}$$

$$2')\quad \begin{cases} \nu_i - m' + m'_i(\nu_i + 2) - m'_{i+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_{h-1} - m'_{h-2} + m'_{h-1}(\nu_{h-1} + 2) - 1 = 0, \\ \nu_h - 1 - m'_{h-1} + \nu_h + 2 = 0. \end{cases}$$

Les équations (1′) sont les mêmes que les équations (1) et donneront pour m' la même valeur que celle obtenue pour m. Au contraire, les équations (2′) donneront, pour m', une valeur distincte de celle obtenue pour m par les équations (2). Or, les deux valeurs de m' devraient évidemment être les mêmes. L'absurdité à laquelle nous sommes conduit provient du fait que nous avons supposé $i > 1$. Nous avons donc $i = 1$ et, lorsque le point A'_1 est double pour Φ_1, le point A′ de Φ est équivalente à l'ensemble de courbes

$$\sigma_1,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_h,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_t,\ \sigma_a.$$

Le degré virtuel de σ_1 est $-(\lambda'_1 + 1)$ et celui de τ_i, $-(\nu_i + 2)$.

16. Supposons maintenant que A'_1 est simple pour la surface Φ_1. Si nous projetons Φ_1 de A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ''_0. Au point A'_2 correspond sur Φ_2 une droite exceptionnelle a et aux courbes τ_h, σ_a correspondent des courbes τ'_h d'ordre $\nu_h - 1$ et σ'_a, d'ordre $\mu_1 - 1$. Les courbes τ'_h, σ'_a rencontrent chacune en un point la droite a.

Les courbes Γ'_0 particulières, rencontrant σ_1 en λ_1 points, s'obtiendront comme dans le cas précédent. Quant aux courbes Γ''_0 particulières rencontrant σ_1 en λ_2 points, elles seront données par

$$\Gamma_0'' - m_2'\tau_2 - \dots - m_{i-1}'\tau_{i-1} - m'\sigma_1 - m_i'\tau_i - \dots - m_{h-1}'\tau_{h-1},$$

mais on aura cette fois $m_{h-1}' = \nu_h - 1$. Un calcul analogue à celui qui a été fait plus haut montre que les valeurs de m' tirées des équations analogues aux équations (1′) et (2′) ne peuvent être égales et dans le cas actuel, on doit également avoir $i = 1$. On arrive donc aux mêmes conclusions que dans le cas précédent.

Il convient d'observer que les courbes Γ_0'' particulières envisagées, rencontrent la droite a en un point. Parmi les courbes Γ_0'', il existe également des courbes particulières rencontrant σ_a en μ_2 points. Ces courbes sont données par

$$\Gamma_0'' - \sigma_a\,;$$

elles ne rencontrent plus la droite a et on a $\mu_2 = 2\mu_1 + 1$. On en conclut $\lambda_2 = 2\lambda_1 - \sigma$.

17. Nous allons poursuivre l'étude de l'involution I_p dans le cas où le point A_1' est simple pour la surface Φ_1. Nous venons de voir que l'on a alors

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 - a, \quad \mu_2 = 2\mu_1 + 1.$$

Les courbes C_0'' ont en A μ_2 tangentes confondues avec a_a, par conséquent sur chacune de ces courbes, le point A sera l'origine d'une branche superlinéaire passant par un certain nombre de points $\mathrm{A}_{a1}, \mathrm{A}_{a2}, \dots$, puis, par un certain nombre de points fixes, unis pour l'involution, infiniment voisins successifs du dernier des points de la suite $\mathrm{A}_{a1}, \mathrm{A}_{a2}, \dots$ appartenant à la branche considérée. Le dernier de ces points est uni parfait pour l'involution, il est simple pour les courbes C_0'' et à son domaine correspond, sur la surface Φ_2, la droite exceptionnelle a.

On a $\lambda_1 < a$ et $\lambda_2 < \lambda_1$, ce qui se justifie par le fait que le point P_h a la multiplicité $\nu_h - 1$ pour les courbes C_0'' et la multiplicité ν_h pour les courbes C_0'.

Les courbes Γ_0' satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_h + \sigma_a$$

et on

$$\Gamma_0'' \equiv \Gamma_0' - a.$$

On doit d'ailleurs avoir

$$\lambda_1 + \mu_1 > a - 1.$$

Envisageons les courbes C_0''' et les courbes Γ_0''' qui leur correspondent sur les surfaces Φ_1 ou Φ_2. Sur cette dernière surface, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par un point A_2'. Comme les courbes C_0''' ont en A une multiplicité supérieure à celles des courbes C_0'' et qu'elles doivent, comme celles-ci, être rencontrées en p points confondus en A par les courbes C_1, ces courbes C_0''' ne peuvent avoir, en tous les points A_{11}, A_{12}, ... le même comportement que les courbes C_0''. Il faut donc que le point A_2' appartienne à la courbe τ_h'.

Le point A_2' ne peut appartenir à la courbe σ_a'. D'autre part, pour la même raison que ci-dessus, les courbes C_0''' ne peuvent avoir le même comportement que les courbes C_0'' en tous les points A_{a1}, A_{a2}, ... ; il faut donc que les courbes C_0''' cessent de passer par le point de F représenté par la droite exceptionnelle a. En d'autres termes, les courbes Γ_0''' ne peuvent rencontrer a en un point variable et le point A_2' appartient à a.

De tout ceci, il résulte que sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans tangents en A_1' à la courbe τ_h.

Parmi les courbes Γ_0'''', il en est qui rencontrent la courbe σ_a en μ_3 points. Elles sont données par $\Gamma_0'''' - 2\sigma_a$ et par conséquent, on a

$$\mu_3 = 3\mu_1 + 2.$$

On en déduit

$$\lambda_3 = 3\lambda_1 - 2a.$$

On peut répéter le raisonnement précédent. Parmi les systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., on trouvera des systèmes dont les courbes correspondantes sur Φ_1 seront découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre $i - 1$ avec la courbe τ_h au point A_1'. Ces courbes correspondent aux valeurs

$$\lambda = (i + 1)\lambda_1 - ia, \quad \mu = (i + 1)\mu_1 + i. \tag{1}$$

On aura d'ailleurs $i \leqslant \nu_h$, valeur qui correspond aux sections de Φ_1 par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\nu_h - 1$ avec

τ_h et qui, par conséquent, ne rencontrent plus cette courbe en des points variables.

Appelons $C_0^{(*)}$ les courbes qui correspondent aux valeurs (1) de λ, μ et $\Gamma_0^{(*)}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ_1. Ces dernières courbes rencontrent $\sigma_1, \tau_1, \dots, \tau_{h-1}, \tau_h$ respectivement en $\lambda_1', \nu_1, \dots, \nu_{h-1}, \nu_h - i$ points et σ_a en $\mu_1 - 1$ points. Les courbes $C_0^{(*)}$ ont en A la multiplicité

$$(i+1)(\lambda_1+\mu_1)-i(\alpha-1).$$

certainement positive, puisque $\lambda_1+\mu_1>\alpha_1$.

Observons que la suite des systèmes obtenus pour $i=1, 2, \dots, \nu_h$ ne donne pas nécessairement la suite $|\, C_0' \,|, |\, C_0'' \,|, \dots$. En effet,

$$\lambda=\lambda_1+\alpha, \quad \mu=\mu_1-1$$

est une solution de la congruence

$$\lambda+\alpha\mu\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

et il peut se faire que les courbes correspondantes sur F aient en A une multiplicité inférieure à celle des courbes $C_0^{(*)}$. Cela se produit si l'on a

$$i(\lambda_1+\mu_1)>(i+1)(\alpha-1).$$

Il se peut aussi que le système correspondant à la solution $\lambda=2\lambda_1$, $\mu=2\mu_1$ se place avant le système donné par la solution (1), si l'on a

$$(i-2)(\lambda_1+\mu_1)>i(\alpha-1).$$

Il se place cependant toujours après le système correspondant à $\lambda=\lambda_1+\alpha$, $\mu=\mu_1-1$.

Nous verrons plus loin des exemples où ces particularités se présentent.

18. Retournons au système $|\, \Gamma_0' \,|$ et envisageons les multiplicités des points $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1,\beta-1}$ pour ces courbes. Les x_1 premiers points sont multiples d'ordre y_1, les x_2 suivant, multiples d'ordre $y_2, \dots$, les x_i suivants multiples d'ordre y_i, les x_0 derniers multiples d'ordre λ_1'. On a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i + x_0 = \beta - 1,$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_i y_i + x_0 \lambda_1' = p - (\lambda_1 + \mu_1),$$

$$\lambda_1 \geqslant y_1 > y_2 > \dots > y_i > \lambda_1'.$$

Pour les courbes Γ_0'', ou tout au moins pour les courbes qui correspondent aux valeurs $\lambda = 2\lambda_1 - \alpha_1$, $\mu = 2\mu_1 + 1$ si $\lambda_1 + \mu_1 > 2(\alpha - 1)$, les multiplicités $y_1, y_2, \dots, y_i$ diminuent au moins en partie. Si $y_1', y_2', \dots, y_i'$ sont ces multiplicités, on a

$$x_1 y_1' + x_2 y_2' + \dots + x_i y_i' + x_0 \lambda_1' = p - 2(\lambda_1 + \mu_1) + (\alpha - 1).$$

Si nous posons

$$\delta_1 = y_1 - y_1', \ \delta_2 = y_2 - y_2', \ \dots, \ \delta_i = y_i - y_i',$$

nous avons

$$x_1 \delta_1 + x_2 \delta_2 + \dots + x_i \delta_i = \lambda_1 + \mu_1 - (\alpha - 1). \tag{1}$$

On vérifie aisément que lorsque l'on passe du système qui correspond aux valeurs $\lambda = (j + 1)\lambda_1 - j\alpha$, $\mu = (j + 1)\lambda_1 + j$, au système qui correspond aux valeurs $\lambda = (j + 2)\lambda_1 - (j + 1)\alpha$, $\mu = (j + 2)\mu_1 + j + 1$, les multiplicités de ces systèmes aux $x_1 + x_2 + \dots + x_i$ points considérés, diminuent de $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$ unités. En particulier, les courbes du système qui correspond à

$$\lambda = (\nu_h + 1)\lambda_1 - \nu_h \alpha, \quad \mu = (\nu_h + 1)\mu_1 + \nu_h,$$

ont les multiplicités

$$y_1 - \nu_h \delta_1, \ y_2 - \nu_h \delta_2, \ \dots, \ y_i - \nu_h \delta_i, \ \lambda_1'$$

respectivement aux x_1 points, aux x_2 points,..., aux x_i points, aux x_0 points que l'on rencontre successivement dans la suite $A_{11}, A_{12}, \dots$

Les courbes Γ_0^* qui correspondent aux valeurs

$$\lambda = (\nu_h + 2)\lambda_1 - (\nu_h + 1)\alpha, \ \mu = (\nu_h + 2)\mu_1 + \nu_h + 1$$

sont découpées sur Φ par les hyperplans qui contiennent la courbe τ_h ; elles rencontrent cette courbe en $2(\nu_h + 1)$ points et ne rencontrent plus la courbe τ_{h-1} qu'en $\nu_{h-1} - 1$ points variables.

Considérons les courbes qui correspondent aux valeurs

$$\lambda = (\nu_h + 2 + j)\lambda_1 - (\nu_h + 1 + j)\alpha, \ \mu = (\nu_h + 2 + j)\mu_1 + \nu_h + 1 + j$$

et les courbes qui correspondent aux valeurs

$$\lambda = (\nu_h + 3 + j)\lambda_1 - (\nu_h + 2 + j)\alpha,\ \mu = (\nu_h + 3 + j)\mu_1 + \nu_h + 2 + j.$$

Les premières rencontrent la courbe τ_{h-1} en $\nu_{h-1} - j - 1$ points variables et les secondes rencontrent la même courbe en $\nu_{h-1} - j - 2$ points variables.

Si l'on répète le raisonnement précédent, on voit que les secondes courbes ont aux $x_1 + x_2 + \ldots + x_i$ points considérés, des multiplicités diminuées de $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_i$ unités par rapport aux multiplicités des premières, et que l'on a

$$x_1\delta'_1 + x_2\delta'_2 + \ldots + x_i\delta'_i = \lambda_1 + \mu_1 - (\alpha - 1). \qquad (2)$$

Mais alors, les courbes Γ^*_0 ont, aux mêmes points, les multiplicités

$$y_1 + (\nu_h + 2)\delta_1 - \delta'_1, \ldots, y_i + (\nu_h + 2)\delta_i - \delta'_i.$$

Cela provient en effet de la variation des multiplicités des points P_h, P_{h-1} pour les courbes correspondantes sur F.

On doit avoir, puisque les courbes C_1 coupent les courbes C^*_0 homologues des courbes Γ^*_0 en p points confondus en A,

$$y_i + (\nu_h + 2)\delta_i - \delta'_i < y_i, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ i),$$

ce qui est impossible en vertu des relations (1) et (2).

On en conclut que les x_0 derniers des points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\beta-1}$ ne peuvent plus avoir pour les courbes Γ^*_0 la multiplicité λ'_1, mais ont une multiplicité inférieure. Cela signifie que les courbes Γ^*_0 rencontrent la courbe σ_1 en moins de λ'_1 points, ou encore que τ_h rencontre la courbe σ_1. On a par conséquent $h = 1$.

Dans les conditions où nous nous sommes placé, le cône tangent à la surface Φ au point de diramation A′ se décompose donc en trois cônes.

D'après ce qui précède, nous avons donc, sur la surface Φ_1,

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \sigma_\alpha.$$

Les courbes Γ'_0 particulières, rencontrent σ_1 en λ_1 points sont données par $\Gamma'_0 - \nu_1\sigma_1$. On a donc

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + \nu_1(\lambda'_1 + 1).$$

19. Nous allons maintenant montrer, par quelques exemples, les divers cas qui peuvent se présenter (nº 17).

Considérons en premier lieu une involution cyclique d'ordre $p = 61$ et supposons $\alpha = 9$, d'où $\beta = 34$. On a

$$\lambda_1 = 7, \quad \mu_1 = 6, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = 4 \times 61.$$

Les courbes C_0' ont la multiplicité 13 en A, deux points A_{11}, A_{12} multiples d'ordre 7, un point $A_{1,3}$ multiple d'ordre 4, 30 points $A_{1,4}$, $A_{1,5}$, ..., $A_{1,33}$ simples et huit points $A_{\alpha 1}$, $A_{\alpha 2}$, ..., $A_{\alpha,\alpha-1}$ multiples d'ordre 6. Au point $A_{1,3}$ est infiniment voisin un point $A_{1,3,1}$ triple pour les courbes C_0'' (c'est le point P_1 considéré plus haut).

Sur la surface Φ_1, la singularité de Φ en A' est équivalente à trois courbes : σ_1, d'ordre un, τ_1, d'ordre trois et σ_α, d'ordre six. Nous désignerons par A_1' le point commun à τ_1, σ_α et par B' le point commun à la droite σ_1 et à τ_1. Nous avons $\lambda_1' = 1$.

Les courbes C_0'' sont données par $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 13$. Les courbes C_0'' passent 18 fois par A, 5 fois par A_{11}, A_{12}, 3 fois par $A_{1,3}$, une fois par $A_{1,4}$, ..., $A_{1,33}$, 2 fois par $A_{1,3,1}$, 8 fois par $A_{\alpha 1}$, 5 fois par $A_{\alpha 2}$, ..., $A_{\alpha,3}$, trois fois par un point $A_{\alpha,1,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,1}$, 2 fois par un point $A_{\alpha,1,2}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,1,1}$, une fois par deux points $A_{\alpha,1,2,1}$, $A_{\alpha,1,2,1,1}$, infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,1,2}$.

Sur Φ_1, les courbes Γ_0'' sont découpées par les hyperplans passant par A_1'.

On a $\lambda_3 = 16$, $\mu_3 = 5$. Les courbes C_0''' ont les multiplicités 21 en A, 5 en A_{11}, 3 en A_{12}, 2 en A_{13}, 1 en $A_{1,4}$, ..., $A_{1,33}$, 1 en $A_{1,3,1}$, 5 en $A_{\alpha,1}$, ..., $A_{\alpha,8}$. Elles passent en outre 2 fois par cinq points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,2}$, ..., $A_{1,1,5}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,1}$, une fois par deux points $A_{1,1,6}$, $A_{1,1,6,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,1,5}$.

Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans touchant τ_1 en A_1'.

On a ensuite $\lambda_4 = 3$, $\mu_4 = 20$. Les courbes $C_0^{(4)}$ passent 23 fois par A, 3 fois par A_{11}, A_{12}, 2 fois par A_{13}, une fois par A_{14}, ..., $A_{1,33}$, $A_{1,3,1}$, 10 fois par $A_{\alpha,1}$, 4 fois par $A_{\alpha,21}$, ..., $A_{\alpha,8}$, 6 fois par $A_{\alpha,1,1}$, 4 fois par $A_{\alpha,1,2}$, deux fois par $A_{\alpha,1,2,1}$, $A_{\alpha,1,2,1,1}$.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans touchant la surface en A_1'.

Les courbes $C_0^{(5)}$ sont données par $\lambda_5 = 14$, $\mu_5 = 12$; elles passent 26 fois par A, 3 fois par A_{11}, une fois par $A_{12}, \ldots, A_{1,33}$, deux fois par $A_{1,1,1}, \ldots, A_{1,1,5}$, une fois par $A_{1,1,6}$, $A_{1,1,6,1}$, 7 fois par $A_{\alpha,1}$, 4 fois par $A_{\alpha,2}, \ldots, A_{\alpha,8}$, 3 fois par $A_{\alpha,1,1}$, 2 fois par $A_{1,1,2}$ et une fois par $A_{1,1,2,1}$, $A_{1,1,2,1,1}$. Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans touchant la surface en A_1' et osculant τ_1 en ce point.

Les courbes $C_0^{(6)}$ sont données par $\lambda_6 = 1$, $\mu_6 = 27$. Elles passent 28 fois par A, une fois par $A_{11}, \ldots, A_{1,33}$, 5 fois par $A_{\alpha 1}$, 4 fois par $A_{\alpha,2}, \ldots, A_{\alpha,8}$, une fois par une suite de 22 points $A_{\alpha,1,1}$, $A_{\alpha,1,2}, \ldots, A_{\alpha,1,2}, \ldots, A_{\alpha,1,22}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,1}$. Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans tangents à Φ_1 en A_1', osculant τ_1 en ce point ; elles sont en plus tangentes à σ_a en A_1'.

Enfin, les courbes $C_0^{(7)}$ sont données par $\lambda_7 = 25$, $\mu_7 = 4$. Elles passent 29 fois par A, 14 fois par A_{11}, 12 fois par A_{12}, 6 fois par A_{13} et par $A_{1,3,1}$, deux fois par $A_{1,1,1}, \ldots, A_{1,1,5}$, une fois par $A_{1,1,6}$ et par $A_{1,1,6,1}$, enfin 4 fois par $A_{\alpha 1}, \ldots, A_{\alpha 8}$. Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans contenant la courbe τ_1. Ce sont les courbes Γ_0^* considérées plus haut.

20. Le second exemple que nous considérerons est celui d'une involution d'ordre $p = 61$, où l'on a $\alpha = 8$ et par suite $\beta = 23$.

Nous avons $\lambda_1 = 5$, $\mu_1 = 7$. Sur la surface Φ_1, le point de diramation A' de Φ est équivalent à l'ensemble d'une conique σ_1 ($\lambda'_1 = 2$), d'une droite $\tau_1(\nu_1 = 1)$ et d'une courbe σ_a d'ordre sept.

Les courbes Γ_0'' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A_1' commun à τ_1 et à $\sigma a(\lambda_2 = 2$, $\mu_2 = 15)$.

Les courbes Γ_0''' ($\lambda_3 = 13$, $\mu_3 = 1$) sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_1 ; elles rencontrent celle-ci en quatre points variables et ne rencontrent plus σ_1 qu'en un point.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ ($\lambda_p = 10$, $\mu_1 = 14$) sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans contenant la droite τ_1 et touchant la courbe σa en A_1'.

Envisageons maintenant un troisième exemple ; celui d'une involution d'ordre $p = 41$, où l'on a $\alpha = 11$ et par conséquent $\beta = 15$.

On a $\lambda_1 = 8$, $\mu_1 = 3$. Sur la surface Φ_1, le point de diramation A' de Φ est équivalent à l'ensemble d'une conique σ_1, d'une conique τ_1 et d'une cubique gauche σ_α.

Les courbes Γ_0'' ($\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 7$) sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A_1' commun à τ_1, α_α.

Les courbes Γ_0'''' ($\lambda_3 = 2$, $\mu_3 = 11$) sont découpées sur Φ par les hyperplans touchant la conique τ_1 en A_1'.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$($\lambda_4 = 19$, $\mu_4 = 2$) sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans contenant la conique τ_1. Elles rencontrent celle-ci en six points variables.

Liège, le 21 mars 1949.