Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 8 octobre 1949

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Sixième note*).

Dans la note précédente [1], nous avons examiné un cas où le cône tangent au point de diramation considéré à la surface image de l'involution, se décomposait en quatre parties. C'est encore à l'étude d'un cas présentant la même particularité que sera consacrée cette nouvelle note. L'utilité de cette recherche est de montier la formation, différente du cas précédemment étudié, des systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, ...

42. Nous considérons, sur la surface F, une involution d'ordre $p = 61$ et nous supposons que, pour le point uni isolé A, nous avons $\alpha = 37$ et par conséquent $\beta = 33$.

Les premières solutions des congruences

$$\lambda + 37\mu \equiv 0, \quad \mu + 33\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 61)$$

dont nous aurons besoin sont :

$\lambda_1 = 11$, $\mu_1 = 3$; $\lambda_2 = 9$, $\mu_2 = 8$; $\lambda_3 = 7$, $\mu_3 = 13$; $\lambda_4 = 5$, $\mu_4 = 18$; $\lambda_5 = 24$, $\mu_5 = 1$; $\lambda_6 = 3$, $\mu_6 = 23$; $\lambda_7 = 22$, $\mu_7 = 6$; $\lambda_8 = 1$, $\mu_8 = 28$; $\lambda_9 = 20$, $\mu_9 = 11$.

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 14 et passent 11 fois par le point (1, 1) infiniment voisin de A, 6 fois par le point (1, 2),

[1] Les notes précédentes ont paru dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641.

une fois par les points (1, 3), (1, 4), ..., (1, 32), 5 fois par le point (1, 2, 1).

Les courbes C_0' passent d'autre part 3 fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 5)$, 2 fois par $(\alpha, 6)$, une fois par $(\alpha, 7)$, $(\alpha, 8)$, ..., $(\alpha, 36)$, enfin une fois par $(\alpha, 6, 1)$.

Nous indiquerons le comportement des courbes C_0' au point A par les schémas suivants :

$$(1, 32)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^6, (1, 1)^{11}, A^{14},$$
$$(1, 2, 1)^5.$$

$$A^{14}, (\alpha, 1)^3, \ldots, (\alpha, 5)^3, (\alpha, 6)^2, (\alpha, 7)^1, \ldots, (\alpha, 36)^1,$$
$$(\alpha, 6, 1)^1,$$

dont il est aisé de comprendre la formation.

Sur la surface Φ image de l'involution, le point de diramation A' homologue de A est multiple d'ordre huit et le cône tangent en ce point à la surface se décompose en quatre parties : trois plans et un cône du cinquième ordre.

Sur la surface Φ_1, projection de Φ à partir de A', il correspond aux domaines des points (1, 2, 1), (1, 32), $(\alpha, 6, 1)$, $(\alpha, 36)$ respectivement une quintique τ_1, une droite σ_1, une droite τ_α et une droite σ_α.

43. Le comportement au point A des courbes C_0'' peut être représenté par les schémas suivants :

$$(1, 32)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^5, (1, 1)^9, A^{17}.$$
$$(1, 2, 1)^4$$

$$A^{17}, (\alpha, 1)^8, (\alpha, 2)^2, (\alpha, 3)^1, \ldots, (\alpha. 36)^1.$$
$$(\alpha, 2, 1)^1$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(\alpha, 2, 6)^1$$

On en conclut que les courbes Γ_0'' sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1' commun aux courbes τ_1 et τ_α. Ce point est simple pour la surface Φ_1 et à son domaine correspond sur la surface F le domaine du point $(\alpha, 2, 6)$.

44. Le comportement des courbes C_0''' au point A est à son tour schématisé de la manière suivante :

$$
\begin{array}{l}
(1, 32)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^4, (1, 1)^7, A^{20}. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2, 1)^3 \\
A^{20}, (\alpha, 1)^6, (\alpha, 2)^1, \ldots, (\alpha, 36)^1, \\
\qquad (\alpha, 1, 1)^5 \\
\qquad (\alpha, 1, 2)^2, (\alpha, 1, 2, 1)^2, (\alpha, 1, 2, 2)^1, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha, 1, 2, 2, 1)^1.
\end{array}
$$

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans touchant la courbe τ_1 au point A_1'. Si nous désignons par A_2' le point infiniment voisin de A_1' sur τ_1, au domaine de A_2' correspond sur F le domaine du point $(\alpha, 1, 2, 2, 1)$.

45. Passons aux courbes $C_0^{(4)}$; leur comportement au point A est fixé par les schémas suivants :

$$
\begin{array}{l}
(1, 32)^1, \ldots, (1, 3)^1, (1, 2)^3, (1, 1)^5, A^{23}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2, 1)^2. \\
A^{23}, (\alpha, 1)^3, (\alpha, 2)^1, \ldots, (\alpha, 36)^1, \\
\qquad (\alpha, 1, 1)^2, \\
\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad \ldots \\
\qquad (\alpha, 1, 7)^2 \\
\qquad (\alpha, 1, 8)^1, (\alpha, 1, 8, 1)^1.
\end{array}
$$

Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans osculant la courbe τ_1 en A_1'. Si nous désignons par A_3' le point infiniment voisin de A_2' sur la courbe τ_1, au domaine de A_3' sur Φ_1 correspond sur F le domaine du point $(\alpha, 1, 8, 1)$.

46. Le comportement au point A des courbes $C_0^{(5)}$ est fixé par les schémas suivants :

$$\begin{array}{llllll} (1,32)^1, & \ldots, & (1,3)^1, & (1,2)^2, & (1,1)^4, & A^{25}, \\ & & & (1,2,1)^1, & (1,1,1)^1 & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & (1,1,20)^1, & \end{array}$$

$$A^{25},\ (\alpha,\ 1)^1,\ (\alpha,\ 2)^1,\ \ldots,\ (\alpha,\ 36)^1.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans ayant un contact du troisième ordre avec la courbe τ_1 au point A_1'. Désignons par A_4' le point de τ_1 infiniment voisin de A_3' ; au domaine du point A_4' sur Φ_1 correspond sur F le domaine du point (1, 1, 20).

47. Envisageons les courbes $C_0^{(6)}$. Leur comportement au point A est représenté par les schémas suivants :

$$\begin{array}{llllll} (1,32)^1, & \ldots, & (1,3)^1, & (1,2)^2, & (1,1)^3, & A^{26}, \\ & & & (1,2,1)^1, & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} A^{26}, & (\alpha,1)^8, & (\alpha,2)^6, & \ldots, & (\alpha,5)^6, & (\alpha,6)^3, \\ & (\alpha,1,1)^2, & & & & (\alpha,6,1)^3. \\ & \ldots & & & & \\ & \ldots & & & & \\ & (\alpha,1,7)^2, & & & & \\ & (\alpha,1,8)^1, & (\alpha,1,8,1)^1. & & & \end{array}$$

Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans contenant la droite τ_a. Ces hyperplans osculent la courbe τ_1 au point A_1', car les courbes $C_0^{(6)}$ passent par le point (α, 1, 8, 1) dont le domaine sur F correspond au domaine de A_3' sur Φ_1. D'autre part, les hyperplans des courbes $\Gamma_0^{(6)}$ touchent la surface Φ_1 en A_1' et par conséquent ne rencontrent plus la courbe τ_1 qu'en un point variable.

Les courbes $C_0^{(6)}$ ne passant plus par le point (α, 36), les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ ne rencontrent plus la droite σ_a, donc les droites τ_a et σ_a se rencontrent en un point.

48. Le comportement des courbes $C_0^{(7)}$ au point A donne les schémas suivants :

$$\begin{array}{llll} (1, 32)^1, \ldots, (1, 3)^1, & (1, 2)^1, & (1, 1)^2, & A^{26}, \\ & & (1, 1, 1)^1 & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & (1, 1, 20)^1, & \\ A^{28}, \ (\alpha, 1)^6, \ \ldots, & (\alpha, 5)^6, & (\alpha, 6)^3, & \\ & & (\alpha, 6, 1)^3. & \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_5^{(7)}$ sont par conséquent découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par la droite τ_a et ayant un contact du troisième ordre avec la courbe τ_1 en A_1'. Comme ces hyperplans touchent Φ_1 en A_1', les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ ne rencontrent plus τ_1 en un point variable.

49. Les schémas fixant le comportement des courbes $C_0^{(3)}$ en A sont les suivants :

$$(1, 32)^1, \ldots, (1, 2)^1, (1, 1)^1, A^{29},$$

$$\begin{array}{lllll} A^{29}, (\alpha, 1)^{13}, & (\alpha, 2)^5, & (\alpha, 3)^4, \ldots, (\alpha, 5)^4, & (\alpha, 6)^2, \\ (\alpha, 1, 1)^2, & (\alpha, 2, 1)^1 & & (\alpha, 6, 1)^2. \\ \ldots & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & & \\ (\alpha, 1, 7)^2 & (\alpha, 2, 6)^1 & & \\ (\alpha, 1, 8)^1, & (\alpha\ 1,\ 8,\ 1)^1. & & \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par τ_a ; ces courbes ont un point double en A_1', une tangente étant variable, l'autre étant confondue avec la tangente en ce point à la courbe τ_1 ; elles passent simplement par A_2' et par A_3', mais ne passent pas par A_4'.

50. Il nous reste, pour achever la détermination de la structure du point de diramation A' de Φ, à examiner les courbes $C_0^{(9)}$. Le comportement de ces courbes en A est caractérisé par les schémas :

$$(1,2)^{10},\ (1,1)^{20},\ A^{31},$$
$$(1,2,1)^{10},$$
$$A^{31},\ (\alpha,1)^{11},\ (\alpha,2)^{5},\ (\alpha,3)^{4},\ \ldots,\ (\alpha,5)^{4},\ (\alpha,6)^{2},$$
$$(\alpha,2,1)^{1},\qquad\qquad (\alpha,6,1)^{2}.$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(\alpha,2,6)^{1}.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par les courbes τ_1, τ_a Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ passent une fois, avec une tangente variable, par le point A_1'.

Comme les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ ne rencontrent plus la droite σ_1, celle-ci rencontre en un point la courbe τ_1.

51. D'après ce qui précède, la singularité de la surface Φ au point de diramation A′ est équivalente à l'ensemble de quatre courbes : une droite σ_1, une quintique rationnelle τ_1, une droite τ_a et une droite σ_a. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a $$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_a + \sigma_a$$

et les courbes σ_1, τ_1, τ_a, σ_a ont respectivement les degrés virtuels -2, -7, -3, -2.

Les courbes Γ_0'', Γ_0''', $\Gamma_0^{(4)}$, $\Gamma_0^{(5)}$ appartiennent au système linéaire

$$|\Gamma_0'| = |\Gamma_0 - \sigma_1 - \tau_1 - \tau_a - \sigma_a|.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, $\Gamma_0^{(7)}$, $\Gamma_0^{(8)}$ appartiennent au système linéaire

$$|\Gamma_0 - \sigma_1 - \tau_1 - 2\tau_a - \sigma_a|.$$

Enfin, les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ appartiennent au système linéaire

$$|\Gamma_0 - \sigma_1 - 2\tau_1 - 2\tau_a - \sigma_a|,$$

mais ne sont pas les courbes les plus générales de ce système, puisqu'elles doivent passer par le point A_1'.

La détermination du comportement en A des courbes $C_0^{(10)}$, ..., ne présente plus de difficulté. On trouverait par exemple que les courbes $C_0^{(10)}$ passent 9 fois par le point (1, 2, 1), 2 fois par le point $(\alpha, 6,1)$ et une fois par le point $(\alpha, 1, 2, 2, 1)$. Par conséquent, les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ touchent en A_1' la courbe τ_1.

Liège, le 7 septembre 1949.