SUR UNE SURFACE CANONIQUE D'IRRÉGULARITÉ 1;

PAR M. LUCIEN GODEAUX

(Liége).

Dans différentes Notes, nous avons cherché à construire des surfaces irrégulières représentant des involutions appartenant aux surfaces qui représentent les couples de points non ordonnés de courbes algébriques (1). L'étude suivante rentre dans cet ordre de recherches et concerne un cas particulier qui nous semble digne d'intérêt. Nous construisons :

Une surface d'ordre 24, *de l'espace ordinaire*, *de genres*

$$p_g = 4, \qquad p_a = 3, \qquad p^{(1)} = 25,$$

dont les sections planes forment le système canonique. ***La** sur-* *face est d'irrégularité* $q = p_g - p_a = 1$ *et contient un faisceau elliptique de courbes d'ordre* 6 *et de genre* 4.

1. Considérons, dans S_4, l'homographie H de période 3,

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{\varepsilon x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon^2 x_3} = \frac{x'_4}{\varepsilon^2 x_4},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Une hyperquadrique Q de S_4 est transformée par H et par H^2 en des hyperquadriques Q′, Q″; les trois hyperquadriques Q, Q′, Q″ ont en général en commun une courbe L d'ordre 8 et de genre 5.

Posons

$$\varphi_1 \equiv a_0 x_0^2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4,$$
$$\varphi_2 \equiv x_0 \alpha_1(x_1, x_2) + \beta_2(x_3, x_4),$$
$$\varphi_3 \equiv x_0 \beta_1(x_3, x_4) + \alpha_2(x_1, x_2),$$

(1) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1935, p. 674-680; 1943, p. 408-422; 815-822; 1944, p. 11-18; 1945, p. 9-16; 1946, p. 443-456.

où α_1, α_2, β_1, β_2 sont des formes algébriques binaires dont le degré est indiqué par l'indice.

Ces hyperquadriques Q, Q′, Q″ ont pour équations

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 \;\; + \varphi_3 \;\; &= 0, \\ \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 \;\; + \varepsilon^2\varphi_3 &= 0, \\ \varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3 \;\; &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent on peut prendre, pour équations de la courbe L,

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

Nous supposerons, pour simplifier,

$$\alpha_2(x_1, x_2) \equiv a_2 x_1 x_2, \qquad \beta_2(x_3, x_4) \equiv b_2 x_3 x_4.$$

Les axes ponctuels de l'homographie H sont le point $O_0(1, 0, 0, 0, 0)$ et les droites

$$O_1 O_2 (x_0 = x_3 = x_4 = 0), \qquad O_3 O_4 (x_0 = x_1 = x_2 = 0).$$

La courbe L ne passe pas par le point O_0, mais s'appuie en deux points, sur chacune des droites $O_1 O_2$, $O_3 O_4$. En donnant à α_2, β_2 les formes particulières indiquées plus haut, nous fixons les points d'appui de L sur les droites $O_1 O_2$ en O_1, O_2 et sur la droite $O_3 O_4$ en O_3, O_4.

L'homographie H détermine sur la courbe L une involution d'ordre 3, γ_3^1, présentant quatre points unis O_1, O_2, O_3, O_4 et par conséquent, en appliquant la formule de Zeuthen, on voit que cette involution est elliptique. Nous désignerons par L′ la courbe image de cette involution.

2. Appelons F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Nous prendrons, comme modèle projectif de la surface L, celui qui a été construit par M. Severi [2]. Considérons la variété de Grassman W_6^5 de S_9 qui représente les droites de l'espace S_4. Aux cordes de L correspondent sur W_6^5 les points du modèle projectif de la surface F construit par M. Severi. C'est une surface d'ordre 74, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques C. Cette surface a les genres

$$p_g = 10, \qquad p_a = 5, \qquad p^{(1)} = 75.$$

---

[2] *Atti della Accad. di Torino*, t. 38, 1902-1903, p. 119.

Soit P un point de F, représentant deux points P_1, P_2 de L. Soient P'_1, P'_2 les points que H fait correspondre à P_1, P_2, et P' le point de F qui représente le couple $P'_1 P'_2$. Le point P' dépend rationnellement de P et réciproquement. Il existe donc une transformation birationnelle T de F en soi, faisant passer de P à P'. Cette transformation est, par construction de période 3 et engendre sur F une involution I_3, d'ordre 3.

Le système canonique $|C|$ de F est transformé en lui-même par T, donc cette transformation est déterminée sur F par une homographie de période 3 de l'espace S_9, homographie que nous désignerons également par T.

Les points unis de l'involution I_3 sont :

1° Les six points A_{12}, A_{13}, . . . , A_{34}, qui représentent les couples de points $O_1 O_2$, $O_1 O_3$, . . . , $O_3 O_4$, c'est-à-dire qui représentent les cordes $O_1 O_2$, $O_1 O_3$, . . . , $O_3 O_4$, de la courbe L.

2° Les quatre points A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, qui représentent les couples de points formés des points O_1, O_2, O_3, O_4 comptés chacun deux fois, c'est-à-dire qui représentent les tangentes à la courbe L aux points O_1, O_2, O_3, O_4.

On sait [3] que les points unis d'une involution d'ordre 3 peuvent être de deux sortes :

1° Les points unis parfaits. Dans le domaine du premier ordre d'un tel point, la transformation T donne la transformation identique, c'est-à-dire transforme en soi chaque tangente à la surface F au point considéré.

2° Les points unis non parfaits. Dans le domaine du premier ordre d'un tel point, la transformation T engendre une involution du troisième ordre possédant deux points unis, c'est-à-dire détermine une involution du troisième ordre dans le faisceau des tangentes en ce point à la surface F.

Nous allons déterminer la nature des dix points unis de l'involution I_3.

3. Commençons par le point uni A_{12}, qui représente la corde

---

([3]) *Voir* notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 275, Paris, Hermann, 1935).

O_1, O_2, axe de l'homographie H. Rappelons qu'une courbe canonique C de F représente les cordes de L appartenant à un complexe linéaire de droites de S_4.

Appelons t_1, t_2 les tangentes à L aux points O_1, O_2. Ces droites sont unies pour l'homographie H. Observons que d'après l'interprétation de la formule de Zeuthen due à M. Castelnuovo, l'hyperplan uni $O_1O_2O_3O_4$ doit toucher la courbe L aux points O_1, O_2, O_3, O_4. Par conséquent, les droites t_1, t_2 appartiennent à cet espace et s'appuient, en des points distincts de O_3, O_4, sur la droite O_3O_4.

Soient P un point de O_1O_2 et ϖ le plan PO_3O_4. Les droites de S_4 s'appuyant sur ϖ forment un complexe linéaire, transformé en lui-même par H. Par conséquent, la réglée des cordes de L s'appuyant sur ϖ est transformée en elle-même par H ; elle contient la droite O_1O_2, unie pour H et par conséquent, la droite de la réglée infiniment voisine de O_1O_2 est nécessairement unie pour H. La courbe C qui correspond à cette réglée passe par le point uni A_{12} et le point de cette courbe, infiniment voisin de A_{12}, est uni pour I_3.

Faisons varier le point P sur la droite O_1O_2. La corde de L située sur la réglée correspondante est unie pour H et varie avec P. On voit donc qu'il y a une infinité de cordes de L, infiniment voisines de O_1O_2, unies pour H. Ce sont d'ailleurs les droites infiniment voisines de O_1O_2 s'appuyant sur les tangentes t_1, t_2. Il en résulte que les points de F infiniment voisins de A_{12} sont unis pour I_3. En d'autres termes, le point A_{12} est uni parfait pour l'involution I_3.

Il en est de même du point A_{34}.

4. Considérons maintenant le point A_{13}, qui représente la droite O_1O_3. Soit P un point de cette droite distinct de O_1, O_3. AP, H et H^2 font correspondre des points P', P'' situés sur la même droite et les trois points P, P', P'' sont distincts. Au plan $\varpi = PO_2O_4$, H fait correspondre le plan $\varpi' = P'O_2O_4$ et H^2 le plan $\varpi'' = P''O_2O_4$. Par conséquent, à la réglée R des cordes de L s'appuyant sur ϖ, H fait correspondre la réglée H' des cordes de L s'appuyant sur ϖ' et H^2 la réglée H'' des cordes de L s'appuyant sur ϖ''. Ces trois réglées contiennent la droite O_1O_2.

Si la droite de R, infiniment voisine de $O_1 O_3$ était unie pour H, elle devrait également appartenir à R′ et à R″. En d'autres termes, la droite infiniment voisine de $O_1 O_3$ s'appuyant sur ϖ, devrait également s'appuyer sur les plans ϖ', ϖ'', ce qui est impossible puisque ces plans sont distincts.

Il existe donc des points de F, infiniment voisins de A_{13}, qui ne sont pas unis pour I_3 et ce point est donc uni non parfait pour cette involution.

Observons que les cordes de L, infiniment voisines de $O_1 O_3$, s'appuyant soit sur le plan uni $O_1 O_4 O_0$, soit sur le plan uni $O_3 O_2 O_0$, sont unies pour H; elles donnent sur F les deux points unis de I_3 infiniment voisins de A_{13}.

Le fait que le point A_{13} est uni non parfait pour I_3 peut d'ailleurs encore s'établir de la manière suivante :

Les cordes de L infiniment voisines de $O_1 O_3$ s'appuyent sur les tangentes t_1, t_3 à L en O_1, O_3; elles appartiennent donc à l'espace $O_1 O_2 O_3 O_4$, puisque t_3 s'appuie sur $O_1 O_2$.

Dans cet espace, prenons comme tétraèdre de référence celui qui a pour sommets les points O_1, O_3, le point O'_2 où t_3 rencontre $O_1 O_2$ et le point O'_t où t_1 rencontre $O_1 O_1$. Si p_{ik} sont les coordonnées radiales des droites de cet espace, on a

$$\frac{p'_{12}}{\varepsilon^2 p_{12}} = \frac{p'_{13}}{p_{13}} = \frac{p'_{14}}{p_{14}} = \frac{p'_{23}}{p_{23}} = \frac{p'_{42}}{p_{42}} = \frac{p'_{34}}{\varepsilon p_{34}}.$$

Interprétons les p_{ik} comme coordonnées des points de l'espace à 5 dimensions. A la congruence lieu des droites s'appuyant sur $t_1 = O_1 O_4^1$ et $t_2 = C_1 O'_2$, correspond la quadrique

$$p_{23} = 0, \qquad p_{14} = 0, \qquad p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} = 0.$$

Le plan tangent à cette quadrique en O'_{13} est $p_{42} = 0$ et dans ce plan tangent, H détermine l'homographie

$$\frac{p'_{12}}{\varepsilon^2 p_{42}} = \frac{p'_{13}}{p_{13}} = \frac{p'_{34}}{\varepsilon p_{34}}.$$

Le point O'_{13} est donc uni non parfait.

De même que A_{13}, les points A_{14}, A_{23}, A_{24} sont unis non parfaits pour l'involution I_3.

5. Il nous reste à examiner les points A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}.

Considérons la tangente t_1 à L en O_1, droite qui est représentée par le point A_{11}. Rappelons que cette droite s'appuie en un point O'_4 sur la droite O_3O_4. Soient P un point de t_1, distinct de O_1, O'_4 et P', P'' les points que H et H^2 lui font correspondre, ϖ, ϖ', ϖ'' les plans PO_2O_4, $P'O_2O_4$, $P''O_2O_4$. Comme dans le cas précédent, on voit que si la corde de L infiniment voisine de t_1 et s'appuyant sur ϖ est unie pour H, cette corde doit également s'appuyer sur ϖ' et sur ϖ'', ce qui est impossible. Il en résulte que le point A_{11} est uni non parfait pour l'involution I_3.

Observons que les droites infiniment voisines de t_1 s'appuyant soit sur le plan uni $O_1O_0O_4$, soit sur le plan uni $O_0O'_4O_2$, sont unies, pour H. Il leur correspond, sur F, les deux points unis de I_3 infiniment voisins de A_{11}.

De même, les points A_{22}, A_{33}, A_{44} sont unis non parfaits pour l'involution I_3.

6. L'involution I_3 possède donc deux points unis parfaits et huit points unis non parfaits. Soit F' une surface image de l'involution I_3. Entre les genres arithmétiques p_a de F et celui p'_a de F', nous avons la relation ([4]).

$$12(p_a+1) = 36(p'_a+1) - 4\alpha - 8\beta,$$

où α est le nombre des points unis parfaits et β celui des points unis non parfaits de I_3. Actuellement, on a $p_a = 5$, $\alpha = 2$, $\beta = 8$, d'où

$$p'_a = 3.$$

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $p'^{(1)}$ de F', on a la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1) + \alpha,$$

d'où

$$p'^{(1)} = 25.$$

7. Le système canonique $|C|$ de F, transformé en lui-même par T, contient trois systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I_3. La détermination de ces systèmes revient à celle des axes ponctuels de l'homographie T de S_9.

Dans S_4, les droites unies pour H appartiennent à trois catégories :

([4]) *Les involutions cycliques* (*loc. cit.*).

1° droites s'appuyant sur les droites O_1O_2, O_3O_4;
2° droites passant par O_0, s'appuyant sur O_1O_2 et droite O_3O_4;
3° droites passant par O_0, s'appuyant sur O_3O_4 et droite O_1O_2.

Aux droites de la première catégorie correspondent des points d'un axe ponctuel σ_0 de T, de dimension $r_0 \geqq 3$, contenant les huit points unis non parfaits de I_3.

Aux droites de la seconde catégorie, correspondent des points d'un axe ponctuel σ_1 de T, de dimension $r_1 \geqq 2$, contenant le point A_{34}, uni parfait.

Enfin, aux droites de la troisième catégorie, correspondent des points du troisième axe ponctuel de T, σ_2, de dimension $r_2 \geqq 2$, contenant le point uni parfait A_{12}.

D'après la théorie des homographies, on a

$$r_0 + r_1 + r_2 + 3 = 10,$$

d'où

$$r_0 = 3, \qquad r_1 = r_2 = 2.$$

Les hyperplans qui passent par σ_1, σ_2 découpent sur F le système $|C_0|$, ceux qui passent par σ_2, σ_0, le système $|C_1|$ et enfin ceux qui passent par σ_0, σ_1, le système $|C_2|$.

Nous avons établi que le système canonique de F' avait pour transformé sur F un système ayant pour points-base les points unis parfaits de I_3 ([5]). Par conséquent, le système canonique $|C'|$ de F' a pour transformé le système $|C_0|$, de dimension 3. Le genre géométrique de F' est donc $p'_g = 4$.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux plans d'un espace linéaire S_3 à trois dimensions. A la surface F correspond le modèle projectif de la surface F' dont les sections planes sont les courbes canoniques C'. Cette surface est d'ordre 24.

Aux points A_{12}, A_{34}, qui sont les points-base simples de $|C_0|$ correspondent sur F' des droites de degré — 3.

Aux huit points unis non parfaits de I_3 correspondent sur F' des points doubles biplanaires ordinaires.

8. La surface F' ayant l'irrégularité $q = p_g - p_a = 1$, doit contenir un faisceau elliptique de courbes. Nous allons construire ce faisceau.

([5]) *Les involutions cycliques* (*loc. cit.*).

Considérons, sur la courbe elliptique L', une série g_1^1 et la série g'_6 qui lui correspond sur L. Aux couples de points d'un groupe de cette dernière série correspondent sur F quinze points qui se partagent en deux catégories. La première comprend les six points images des couples de points de L appartenant à un même groupe de γ_3^1. La seconde catégorie comprend les points images des couples de points de L appartenant à deux groupes distincts de γ'_3. Lorsque le groupe varie dans la série g_6^1, les points de la première catégorie varient sur une courbe K, les points de la seconde catégorie varient sur une courbe Γ, sur laquelle ils engendrent une série g_9^1.

Voyons quels sont les points multiples de cette série. Ils sont de deux sortes : ceux qui proviennent des points unis de la série γ_3^1 et ceux qui proviennent des points unis de la série g_2^1 de L'. Les points unis de γ_2^1 sont au nombre de quatre; on a en correspondance quatre groupes de la série g_9^1 formés de trois points simples et de trois points doubles. Si π est le genre de Γ, on a donc

$$2(9+\pi-1)=24+12=36.$$

On en déduit $\pi=10$.

La courbe Γ est donc de genre 10. Aux ∞^1 séries g_2^1 de L' correspondent ∞^1 courbes Γ et ces courbes forment un faisceau. En effet, à un point P de F correspondent deux points P_1, P_2 de L qui déterminent deux groupes de γ_3^1. A ces groupes correspondent deux points de L', qui déterminent une et une seule g_2^1. Par P passe donc une seule courbe Γ. D'autre part, les ∞^1 séries g_2^1 de L' forment une variété elliptique, birationnellement identique à L', donc les courbes Γ forment sur F un faisceau elliptique $\{\Gamma\}$,

Par construction, les courbes Γ appartiennent à l'involution I_3 et il leur correspond sur F' des courbes Γ' formant un faisceau elliptique $\{\Gamma'\}$.

A un groupe de la série g_6^1 considérée tantôt sur L correspondent sur F' trois points de la courbe Γ' homologue et ces points engendrent sur cette courbe Γ' une série g_3^1. On déduit facilement de ce qui a été obtenu plus haut que cette série possède quatre points triples et quatre points doubles. Si π' est le genre de la courbe Γ', on a

$$2(3+\pi'-1)=8+4=12,$$

d'où $\pi'=4$.

Voyons maintenant quel est, sur la surface F', l'ordre des courbes Γ', c'est-à-dire le nombre de leurs points de rencontre avec les courbes C'. Recherchons en premier lieu le nombre des points de rencontre d'une courbe Γ avec une courbe C sur la surface F. A la courbe C correspond sur L une série g_3^1 canonique et à la courbe Γ une série g_6^1. Ces deux séries ont en commun, d'après la formule de Schubert, 30 couples de points. Mais il faut en défalquer les 12 couples de points communs aux séries γ_3^1 et g_8^1, qui donnent des points d'intersection des courbes C et K; on en conclut que les courbes Γ rencontrent les courbes C en 18 points. Si en particulier la courbe C est une courbe C_0, ces 18 points forment nécessairement six groupes de I_3 et les courbes Γ' rencontrent donc les courbes C' en six points.

Les courbes Γ' sont d'ordre 6 et de genre 4; elles forment sur F un faisceau elliptique $\{\Gamma'\}$.

9. Nous terminerons par une remarque. Soit Φ la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe elliptique L'. On sait que Φ est birationnellement identique à une réglée elliptique, les génératrices rectilignes correspondant aux ∞^1 séries g_2^1 appartenant à la courbe L'.

A un point de Φ correspondent deux points de L'; à ces deux points correspondent sur L deux groupes de la série γ_3^1. Aux couples de points formés d'un point de chacun de ces deux groupes, correspondent neuf points de la surface F. Ces neuf points engendrent une involution J_9 d'ordre 9 et tout groupe de cette involution est formé de trois groupes de l'involution I_3. A l'involution J_9 correspond sur F' une involution J'_3 d'ordre 3, dont Φ est la surface image.

L'involution J_9 n'est pas cyclique et possède une courbe unie : la courbe qui représente les couples de points appartenant à un même groupe de γ_3^1, courbe que nous avons désignée par K. Désignons par K_0 la courbe de F qui représente les couples de points confondus de L. Il existe ∞^1 groupes de J_9 formés de trois points de K_0 et de trois points, unis pour J_9, de la courbe K. Chacun de ces groupes de trois points appartient d'ailleurs à l'involution I_3.

Soient K' et K'_0 les courbes qui correspondent, sur F', aux courbes K et K_0. L'involution J_3 a K' comme courbe unie et il existe ∞^1 groupes de cette involution formée d'un point de K'_0 et d'un point, uni, de K'. A l'ensemble des courbes K', K'_0 correspond sur Φ la courbe elliptique image des couples de points confondus de L'. Il en résulte que les courbes K', K'_0 sont elliptiques et les courbes K, K_0 de genre 5. Sur la surface F', d'ordre 24, de S_3, les courbes K', K'_0 sont respectivement d'ordres 4 et 8.

Les courbes Γ de F appartiennent à l'involution J_9 et les courbes Γ' de F' à l'involution J_3; elles correspondent aux droites de la surface réglée Φ.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2ᵉ série, t. LXXI, janvier-février 1947.)