SUR UNE SUITE DE QUADRIQUES ASSOCIÉE A UNE CONGRUENCE W.*

par Lucien Godeaux.

Dans une note récente, M. Chenkuo Pa [1] a cherché à donner une nouvelle définition de la suite de quadriques que nous avons attachée à tout point non parabolique d'une surface; [2] il a ensuite indiqué que l'on pouvait de même attacher une suite de quadriques à toute droite d'une congruence W. C'est ce que nous avons fait voici déjà quelques années [3] et nous voudrions indiquer brièvement les résultats auxquels nous sommes parvenus.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par Q l'hyperquadrique de Klein, appartenant à un espace linéaire S_5, à cinq dimensions, qui représente les droites de l'espace, par U, V les points de Q qui représentent respectivement les tangentes en un point x de (x) à la ligne u (sur laquelle u varie) et à la ligne v passant par ce point. Tzitzeica [4] et M. Bompiani [5] ont montré que les points U, V sont les transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent donc à une suite de Laplace

$$\cdots, U_n, \cdots, U_1, U, V, V_1, \cdots, V_n, \cdots, \tag{1}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Cette suite este autopolaire par rapport à Q; le point U_n, par exemple, est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Il en résulte que les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ et $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q; ils coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques qui représentent les deux séries réglées d'une quadrique Φ_n. Pour $n = 0, 1, 2, \cdots$, on obtient la suite de quadriques que nous avons

* Received April 21, 1947.

[1] "A new definition of the Godeaux sequence of quadrics," *American Journal of Mathematics*, vol. 69 (1947), pp. 117-120.

[2] "Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé," *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (1927), pp. 812-826; (1928), pp. 31-41; "La théorie des surfaces et l'espace réglé," *Actualités scientifiques et industrielles*, Paris (1934).

[3] "Sur quelques familles de quadriques associées aux points d'une surface," *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* (1928), pp. 213-226; "La théorie des surfaces . . .," *loc. cit.*, pp. 21-24.

[4] *Géométrie projective différentielle des réseaux*, Paris, (1924).

[5] "Sull'equazione di Laplace," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 34 (1912), pp. 383-407.

attachée au point x de la surface, la première quadrique étant la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques.

La section de Q par l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ représente un complexe linéaire et les coordonnées du pôle U_n de l'hyperplan par rapport à Q sont les coefficients de l'équation de ce complexe en coordonnées de droites. On obtient donc une suite de complexes linéaires qui se succèdent dans une suite de Laplace. On peut facilement, au moyen de cette suite de complexes, définir la suite de quadriques Φ, Φ_1, $\Phi_2, \cdots$, sans passer par l'espace S_5.

2. Soient j une droite engendrant une congruence $W:(j)$ et (x), $(\bar{x})$ les surfaces focales de cette congruence. Les asymptotiques u, v se correspondent sur les surfaces (x), $(\bar{x})$ et nous attacherons à la surface (x) la suite le Laplace (1), à la surface $(\bar{x})$ la suite de Laplace analogue

$$\cdots, \bar{U}_n, \cdots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \cdots, \bar{V}_n, \cdots. \tag{2}$$

Les droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ se coupent en un point J, représentant sur Q la droite j de (j) et on sait (Darboux) que le point J décrit un réseau conjugué aux congruences de droites UV, $\bar{U}\bar{V}$. Le point J appartient donc à une suite de Laplace

$$\cdots, J_n, \cdots, J_1, J, J_{-1} \cdots, J_{-n}, \cdots, \tag{3}$$

inscrite dans les suites (1) et (2). D'une manière précise, le point J_n, par exemple, est le point d'intersection des droites $U_{n-1}U_n$ et $\bar{U}_{n-1}\bar{U}_n$.

Les droites $U\bar{U}$, $V\bar{V}$ se coupent en un point P qui est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$. Le point P appartient à une suite de Laplace

$$\cdots, P_n, \cdots, P_1, P, P_{-1}, \cdots, P_{-n}, \cdots, \tag{4}$$

polaire de la suite (3) par rapport à Q. La suite (4) est circonscrite aux suites (1) et (2). Dans les suites (3) et (4), chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et le point P_n est le pôle de l'hyperplan $J_{-n+2}, J_{-n+1}, J_{-n}, J_{-n-1}, J_{-n-2}$.

Les plans $J_{-n-1}J_{-n}J_{-n+1}$ et $P_{n-1}P_nP_{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques qui représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique Ψ_n. Lorsque n prend toutes les valeurs entières, positives, nulle ou négatives, on obtient une suite de quadriques associées à la génératrice j de la congruence (j). Pour $n = 0$, la quadrique Ψ_0 dégénère en deux plans qui sont les plans focaux de droite j.

Deux quadriques consécutives de la suite

$$(5) \qquad \cdots, \Psi_{-n}, \cdots, \Psi_{-1}, \Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_n, \cdots$$

se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces quadriques.

En remarquant que les coordonnées du point P_n sont les coefficients de l'équation d'un complexe linéaire, on obtient une suite de complexes linéaires se succédant dans une suite de Laplace; cette suite comprend le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j. On pourra en déduire la définition de la suite de quadriques (5) sans passer par l'espace S_5.

Nous renvoyons à nos notes citées plus haut pour d'autres propriétés.[6]

UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

[6] Voir aussi: Rozet, "Recherches sur les congruences W," *Mémoires de la Société des Sciences de Liége* (1935), pp. 1-31.