Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 août 1947.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique et sur un théorème de Picard,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Un théorème fréquemment utilisé dans la géométrie sur une surface algébrique est le suivant : *Un multiple d'ordre suffisamment élevé d'un système linéaire*, ∞^2 *au moins, irréductible, de courbes, privé de courbes fondamentales propres, est régulier*. En préparant un cours que nous devons faire sur ces questions l'hiver prochain, il nous a paru que la démonstration de ce théorème devait être précisée et c'est ce que nous faisons au début de cette note. Notre point de départ est le suivant : Si $|C|$ désigne un système linéaire irréductible, ∞^3 au moins, privé de courbes fondamentales propres, et si $|C'|$ est son adjoint, il existe un entier positif h tel que le système $|hC + C'|$ découpe, sur C, une série complète. Si $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{h-1}$ sont les défauts des séries, découpées sur une courbe C par les systèmes $|C'|$ $|C + C'|, \ldots, |(h-1)C + C'|$, l'irrégularité de la surface est

$$q = p_g - p_a = \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{h-1}.$$

De plus. le défaut de la série découpée sur une courbe par son adjoint, est au plus égal à q. Ces propriétés sont dues à F. Enriques (¹).

(¹) F. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (MEMORIE DELLA SOC. ITAL. DELLE SCIENZE, 1896). Voir nº 40. F. ENRIQUES et L. CAMPEDELLI, *Lesioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, Cedam, 1932). Voir nºs 45, 46.

Nous utilisons également un théorème dû à M. Castelnuovo [1], mais que nous démontrons à nouveau, à savoir que le système $|hC + C'|$ est régulier.

Chemin faisant, nous nous sommes aperçu que l'on pouvait obtenir assez simplement la démonstration du théorème de Picard sur la régularité du système adjoint à un système linéaire. On sait que Picard a obtenu ce théorème par une voie qu'il appelle lui-même « une voie détournée », en utilisant les intégrales de Picard attachées à une surface algébrique [2]. Une élégante démonstration géométrique en a été donnée par M. Severi [3]. Celle que nous avons obtenue nous paraît faire appel à des propriétés plus simples et peut s'encadrer dans un exposé immédiatement après les théorèmes fondamentaux d'Enriques rappelés plus haut. Il convient cependant d'observer que nous devons faire l'hypothèse que la courbe du système linéaire envisagé a le genre au moins égal à l'irrégularité $q = p_g - p_a$ de la surface. On sait d'autre part qu'une courbe de genre inférieur à l'irrégularité de la surface appartient à un faisceau irrationnel, dont le genre est égal au nombre d'intégrales de Picard de première espèce qui restent constantes sur la courbe. L'hypothèse que nous faisons n'est donc pas une simple hypothèse de commodité.

Ajoutons que les systèmes linéaires de courbes que nous considérons sont toujours supposés irréductibles, même lorsque cela n'est pas spécifié explicitement.

---

(1) G. Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (Annali di Matematica, 1897, s. 2, t. XXV) ; (Memorie scelte, Bologne, 193). Voir chap. II.

(2) E. Picard, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Journal de Crelle, 1905, t. 129). Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II. (Paris, 1906). Voir pp. 437-438.

(3) F. Severi, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Rend. Accad. dei Lincei, 2e sem. 1908).

1. Soit F une surface algébrique. Considérons, sur cette surface, un système linéaire $|C_1|$, de degré n_1 et de genre π_1, de dimension au moins égale à trois, privé de courbe fondamentale. Nous supposerons qu'un système linéaire ∞^3, tiré de $|C_1|$, peut être pris comme système des sections planes d'un modèle projectif de F n'ayant que des singularités ordinaires (courbe double et points triples à la fois pour la courbe double et pour la surface). $|C_1|$ est donc irréductible.

Nous désignerons par C_h la courbe général du système $|hC_1|$. On sait que le système $|C_h + C'_1|$ découpe une série complète sur la courbe C_1 à partir d'une certaine valeur k de h. En d'autres termes, si l'on désigne par δ_h le défaut de la série linéaire découpée par $|C_h + C'_1|$ sur une courbe C_1, on a $\delta_h = 0$ pour $h > k$. Enriques, auquel est dû ce résultat, l'a utilisé pour introduire l'irrégularité

$$q = p_g - p_a = \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_k$$

de la surface F.

Désignons par n_h le degré de $|C_h|$, par π_h son genre et par r_h la dimension du système $|C_h + C'_1|$. Si n', π' sont le degré et le genre de l'adjoint $|C'_1|$ à $|C_1|$, le système $|C_h + C_1|$ a le degré

$$N_h = n_h + n' + 2h(2\pi - 2)$$

et le genre

$$\Pi_h = \pi_h + \pi' + h(2\pi - 2) - 1.$$

Les courbes C'_1 découpent sur une courbe C_1 une série comprise totalement dans la série canonique, de défaut δ_0. Cette série a donc la dimension $\pi - 1 - \delta_0$. Par conséquent, le système $|C'_1 - C_1|$, c'est-à-dire le système canonique de F, a la dimension

$$p_g - 1 = r_0 - \pi_1 + \delta_0.$$

Supposons $h > 1$. Le système $|C_h + C'_1|$ découpe, sur C_1, une série d'ordre $hn + 2\pi_1 - 2$, non spéciale, de défaut δ_h. Par conséquent, la dimension r_{h-1} de $|C_{h-1} + C'_1|$ est donnée par

$$r_{h-1} = r_h - hn_1 - (\pi_1 - 1) + \delta_h.$$

En faisant dans cette relation $h = 1, 2, \ldots$ et en additionnant les formules obtenues membre à membre à la formule précédente, on trouve

$$r_h = p_g + \tfrac{1}{2}h(h+1)n_1 + (h+1)(\pi_1 - 1) - q.$$

Formons l'expression

$$N_h - \Pi_h + 1.$$

On a

$$n_h = h^2 n_1, \pi_h = h(\pi_1 - 1) + \tfrac{1}{2}h(h-1)n_1 + 1,$$

d'où, en utilisant la relation $n' - \pi' = \pi_1 - 2$,

$$N_h - \Pi_h + 1 = \tfrac{1}{2}h(h+1)n_1 + (h+1)(\pi_1 - 1).$$

On a donc, en tenant compte de $q = p_g - p_a$,

$$r_h = p_a + N_h - \Pi_h + 1.$$

pour $h \geqslant k$. Le système $|C_h + C'_1|$ est donc régulier. Observons qu'il est l'adjoint à $|C_{h+1}|$; il découpe, sur une courbe C_{h+1}, une série linéaire de défaut $q = p_g - p_a$.

2. Soit $|C|$ un second système linéaire de courbes tracées sur la surface F. Considérons le système

$$|C_{h+1} + C|.$$

Supposons que l'adjoint au système $|C_{h+1} + C|$ découpe, sur une courbe de ce système, une série linéaire de défaut Δ. Soient n le degré et π le genre de $|C|$, m (> 0) le nombre de points communs aux courbes C, C_1. Le genre de la courbe $C_{h+1} + C$ est donc égal à

$$\pi_{h+1} + \pi + (h+1)m - 1$$

et la dimension de son adjoint est donc

$$p_g + \pi_{h+1} + \pi + (h+1)m - \Delta - 2.$$

L'adjoint

$$|(C_{h+1} + C)'| = |C_{h+1} + C'|$$

découpe, sur une courbe C, une série d'ordre $(h+1)m + 2\pi - 2$, non spéciale si $m > 0$, ayant un certain défaut ω. Sa dimension est donc égale à $(h+1)m + \pi - 2 - \omega$ et la dimension du système

$$|(C_{h+1} + C)' - C| = |C'_{h+1}| = |C_h + C'|$$

est donc égale à

$$p_g + \pi_{h+1} + \pi + (h+1)m - \Delta - 2 - (h+1)m$$
$$- (\pi - 1) + \omega = p_g + \pi_{h+1} - \Delta + \omega - 1.$$

Mais d'autre part, elle est égale à r_h ; toutes réductions faites, on en déduit

$$\Delta - \omega = p_g - p_a.$$

D'autre part, le défaut de la série découpée sur la courbe d'un système linéaire par l'adjoint à ce système est au plus égale à $q = p_g - p_a$, donc $\Delta \leqslant p_g - p_a$ et par conséquent $\Delta = p_g - p_a$, $\omega = 0$.

L'adjoint $|(C_{h+1} + C)'|$ du système $|C_{h+1} + C|$ est par conséquent régulier. On en conclut que *l'adjoint à un système suffisamment ample est régulier.*

3. Nous pouvons maintenant reprendre le raisonnement d'Enriques. Soient $|K|$ le système canonique de F et $|C|$ un système linéaire de courbes tracées sur cette surface, privé de courbes fondamentales, ∞^2 au moins.

On peut prendre un entier positif λ suffisamment grand pour que le système $|\lambda C|$ comprenne le système canonique $|K|$. Soit

$$|H| = |\lambda C - K|.$$

Le système $|\lambda C|$ est l'adjoint du système $|H|$. On peut prendre λ suffisamment élevé pour que le système $|H|$ comprenne un multiple du système $|C_1|$ tel que l'adjoint à ce multiple soit régulier. Il résulte de la proposition établie plus haut que $|\lambda C|$ est alors régulier.

4. Dans ce qui précède, nous avons considéré trois systèmes linéaires $|C_{h+1}|$, $|C|$ et $|C_{h1} + C|$, possédant les propriétés suivantes :

1° L'adjoint à $|C_{h+1}|$ est régulier ;

2° L'adjoint à $|C_{h+1} + C|$ est régulier ;

3° Cet adjoint découpe, sur une courbe C, une série linéaire complète ($\omega = 0$).

Nous allons, pour plus de simplicité, modifier nos notations et considérer trois systèmes linéaires $|D|$, de degré n_0 et de genre π_0, $|C|$, de degré n et de genre π, $|C + D|$ de degré $n_0 + n + 2m$, de genre $\pi_0 + \pi + m - 1$, $m > 0$ étant le nombre de points d'un groupe (C, D), commun à une courbe C et à une courbe D.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

1° L'adjoint $|D'|$ à $|D|$ est régulier ;

2° L'adjoint $|(C + D)'|$ à $|C + D|$ est régulier ;

3° L'adjoint $|(C + D)'|$ découpe sur une courbe C une série complète.

L'adjoint $|(C + D)'|$ étant régulier, a la dimension

$$p_a + \pi_0 + \pi + m - 2.$$

Il découpe sur une courbe C une série complète, d'ordre $m + 2\pi - 2$, non spéciale puisque $m > 0$ et par conséquent de dimension $m + \pi - 2$. Les courbes du système $|(C + D)'|$ qui passent par un groupe (C, D) découpent sur C la série canonique complète, donc le passage d'une courbe de ce système par un groupe (C, D) équivaut à $m - 1$ conditions.

Considérons le système linéaire formé par les courbes $(C + D)'$ passant par le groupe de points (C, D) commun à une courbe C et à une courbe D déterminées ; il a la dimension

$$p_a + \pi_0 + \pi - 1.$$

Parmi ces courbes, il en est qui contiennent les courbes C et D considérées et sont complétées par les courbes canoniques de la surface. Le système formé par ces courbes dégénérées a la dimension $p_g - 1$ du système canonique, par conséquent, il existe dans le système des courbes $(C + D)'$ passant par le groupe (C, D), un système linéaire de dimension $\pi_0 + \pi - q - 1$, formé de courbes qui ne peuvent contenir les courbes canoniques comme parties. Nous désignerons ce système par $|L|$ et nous supposerons $\pi_0 \geqslant q$, $\pi \geqslant q$.

Le système $|L|$, d'après sa construction, peut contenir des courbes formées de la courbe D et d'une adjointe à C, ou de la courbe C et d'une adjointe à D, mais il ne peut contenir de courbes contenant à la fois les courbes C et D.

L'adjoint $|D'|$ à $|D|$ étant régulier, découpe sur D une série $|G_0|$ comprise dans la série canonique, de dimension $\pi_0 - q - 1$. L'adjoint $|C'|$ à $|C|$ découpe sur C une série $|G|$, comprise dans la série canonique, d'une certaine dimension $\pi - \delta - 1$.

Les courbes L passant par un groupe G, forment un système linéaire de dimension $\pi_0 - q$. Elles découpent sur D une série comprenant certainement la série $|G_0|$, car parmi les courbes L considérées se trouvent les courbes $C + D'$, formant un système linéaire de dimension $\pi_0 - q - 1$. Par un groupe G_0, il doit passer ∞^1 courbes L contenant le groupe G, car celui-ci est découpé par une courbe C' et il existe donc une des courbes L passant par G et G_0 qui doit contenir la courbe D comme partie. Ainsi, les courbes L passant par un groupe G découpent sur D exactement la série $|G_0|$.

Les courbes L passant par un groupe G_0 forment un système linéaire de dimension $\pi - q$. Pour la même raison que ci-dessus, il passe ∞^1 de ces courbes par chaque groupe G. Il ne peut en passer ∞^2, car alors il y aurait une de ces courbes contenant la courbe C et la courbe D, contrairement à la construction de $|L|$. Mais alors, la dimension de la série $|G|$ est $\pi - q - 1$ et par conséquent $\delta = q$.

On parvient ainsi au théorème de Picard : *L'adjoint à un système linéaire irréductible de courbes de genre au moins égal à l'irrégularité de la surface, est régulier.*

5. Ajoutons une remarque. Sur une courbe C, il y a une série linéaire de dimension $q - 1$, de groupes canoniques non découpés par les adjointes C' à C. Soit $|\overline{G}|$ cette série. Puisque les courbes L découpent sur une courbe C la série canonique complète, les courbes L passant par un groupe $\overline{G}$ forment un système linéaire de dimension $\pi_0 - q$. Les courbes de ce système découpent sur la courbe D, une série comprise dans la série canonique comprenant $|G_0|$ comme série partielle. Le raisonnement fait plus haut n'est en effet plus valable, car il ne peut exister une adjointe C' à C passant par G (sans contenir C). Il en résulte que, lorsque $\overline{G}$ varie dans $|G|$, on obtient sur D ∞^{q-1} groupes canoniques n'appartenant pas à $|G_0|$. Les courbes L découpent donc sur D la série canonique complète.

Liège le 10 juillet 1947.