

GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

Remarques sur la construction de surfaces algébriques
non rationnelles de genres zéro,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans une note antérieure ⁽¹⁾, nous avons montré que si une involution d'ordre $p = p_a + 1$, cyclique, privée de points unis, appartient à une surface algébrique régulière F de genre p_a , l'image de cette involution est une surface Φ de genres $p_a = p_\sigma = 0$, $P_2 > 0$. Nous en avons déduit l'existence de deux surfaces déterminées, l'une de bigenre $P_2 = 2$ ⁽²⁾, l'autre de bigenre $P_2 = 3$ ⁽³⁾. Dans cette note, nous allons apporter un complément à la première note citée en démontrant que le système canonique de la surface F contient p_a courbes isolées, appartenant à l'involution.

1. Soit F une surface algébrique régulière, de genre $p_a > 2$, dont le système canonique n'est pas composé au moyen d'un faisceau, contenant une involution cyclique d'ordre $p = p_a + 1$, privée de points unis. Désignons par F' une surface image de cette involution. La surface F' est régulière et son genre arithmétique p'_a est donné par la formule

$$p_a + 1 = p(p'_a + 1) = (p_a + 1)(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 0$.

La transformation birationnelle T de F en soi, génératrice

⁽¹⁾ Sur certaines involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique, (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1933, pp. 986-991).

⁽²⁾ Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux (Rendiconti Accad. Lincei, 2^e sem. 1931, pp. 479-581) ; Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro, dont le genre linéaire est égal à deux. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1932, pp. 26-37).

⁽³⁾ Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 688-693).

de l'involution, transforme le système canonique $|K|$ de F en lui-même. Il existe, dans $|K|$, un certain nombre de systèmes linéaires partiels, $|K_1|, |K_2|, \dots, |K_t|$, appartenant à l'involution. Si nous désignons par $r_1, r_2, \dots, r_t$ les dimensions respectives de ces systèmes, nous avons, d'après la théorie des homographies,

$$r_1 + r_2 + \dots + r_t + t = p_a = p - 1,$$

d'où $t \leq p - 1$.

Soient $|K'_1|, |K'_2|, \dots, |K'_t|$ les systèmes linéaires qui correspondent sur F' respectivement aux systèmes $|K_1|, |K_2|, \dots, |K_t|$. Aucun de ces systèmes ne peut être le système canonique de F' , puisque cette surface, régulière, est de genre $p_a = p_g = 0$ et que son système canonique n'existe pas.

2. Formons, sur la surface F' , les systèmes linéaires complets,

$$|2K'_1|, |2K'_2|, \dots, |2K'_t|, |K'_1 + K'_2|, \dots, |K'_{t-1} + K'_t|.$$

Ces systèmes ne sont pas tous distincts. Désignons par $|L'_1|, |L'_2|, \dots, |L'_h|$ les systèmes linéaires distincts ainsi obtenus. Il leur correspond sur F des systèmes $|L_1|, |L_2|, \dots, |L_h|$, linéaires, appartenant à l'involution, compris dans le système bicanonique

$$|L| = |2K|$$

de la surface F . Le système bicanonique $|L|$ de F peut d'ailleurs contenir d'autres systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution ; nous les désignerons par $|L_{h+1}|, \dots, |L_k|$.

Sur une courbe K_1 , T engendre une involution d'ordre p et dans la série canonique de cette courbe, découpée complètement par le système $|L|$, il y a p séries linéaires appartenant à l'involution. Sur la courbe K'_1 homologue de K_1 , il correspond à ces séries la série canonique et $p - 1$ séries paracanoniques. Les courbes $L'_1, L'_2, \dots, L'_h$ découpent donc sur une courbe K'_1 soit la série canonique, soit une série paracanonique.

3. Supposons que le système $|L'_1|$ ne contienne aucune des courbes

$$2K'_1, K'_1 + K'_2, K'_1 + K'_3, \dots, K'_1 + K'_t,$$

mais contienne les courbes $K'_2 + K'_i$ ($i > 1$).

Observons que les courbes $K'_1, K'_2, \dots, K'_t$ ont toutes le même genre π , donné par

$$p(\pi - 1) = p^{(1)} - 1,$$

$p^{(1)}$ étant le genre linéaire de F .

Le système $|L'_1|$ ne peut découper, sur une courbe K'_2 , la série canonique de celle-ci, car il serait alors adjoint à $|K'_2|$ et comme on a

$$|L'_1 - K'_2| = |K'_i|,$$

$|K'_i|$ serait le système canonique de F' , ce qui est impossible. Il en résulte que le système $|L'_1|$ découpe sur K'_2 une série paracanonique et a la dimension $\pi + r_i - 1$.

Supposons que $|L'_1|$ découpe sur une courbe K'_1 une série paracanonique, de dimension $\pi - 2$. Comme par hypothèse une courbe L'_1 ne peut contenir une courbe K'_1 , la dimension de $|L'_1|$ est égale à $\pi - 2$. Mais alors, on aurait $r_i = -1$, ce qui est absurde. On en conclut que $|L'_1|$ est l'adjoint à $|K'_1|$ et a la dimension $\pi - 1$. Par conséquent, on a $r_i = 0$ et la courbe K_i est isolée.

Le même raisonnement peut être repris pour les courbes $K'_2, K'_3, \dots, K'_t$ et on trouve ainsi $r_1 = r_2 = \dots = r_t = 0$. Par suite, $t = p - 1$.

4. Dans le système canonique $|K|$ de F , il existe donc $p - 1 = p_a$ courbes isolées $K_1, K_2, \dots, K_{p-1}$ appartenant à l'involution. Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on peut attacher à ces courbes respectivement les nombres $\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{p-1}$, en changeant éventuellement la numérotation des courbes.

Les courbes $K_i + K_j$ appartiennent à l'un des systèmes $|L_1|, |L_2|, \dots, |L_k|$, auquel nous attacherons le nombre ϵ^{i+j} , $i + j$ étant éventuellement diminué de p . Cela étant nous désignerons par $|L_1|$ le système auquel est attaché le nombre ϵ , par $|L_2|$ celui auquel est attaché ϵ^2 , ..., par $|L_{p-1}|$ le système auquel est attaché le nombre ϵ^{p-1} , enfin par $|L_p|$ le système auquel est attaché le nombre $\epsilon^p = 1$.

Il est aisé de voir que les systèmes $|L'_1|, |L'_2|, \dots, |L'_{p-1}|$

sont respectivement les adjoints aux courbes $K'_1, K'_2, \dots, K'_{p-1}$. Le système $|L'_1|$ par exemple comprend les courbes

$$K'_2 + K'_{p-1}, K'_3 + K'_{p-2}, \dots$$

Le système $|L'_2|$ comprend les courbes

$$2K'_1, K'_3 + K'_{p-1}, \dots$$

Il en résulte que l'adjoint à $|L'_1|$ est $|2K'_1 + K'_{p-1}|$; par conséquent, le système bicanonique de F' est

$$|L_p| = |K'_1 + K'_{p-1}| = |K'_2 + K'_{p-2}| = \dots$$

On sait d'ailleurs que le bigenre de F' est $P_2 = \pi$.

On a évidemment $h = k = p$.

5. Le raisonnement précédent suppose que l'on a $t > 1$. Supposons maintenant $t = 1$, c'est-à-dire que le système canonique $|K|$ de F appartienne à l'involution. Le système bicanonique $|L|$ ne peut appartenir à l'involution, car comme d'après les hypothèses, il est plus ample que $|K|$, la surface F' posséderait un système canonique, ce qui est impossible.

Cela étant, $|L|$ contient un certain nombre $k > 1$ de systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution; désignons-les par $|L_1|, |L_2|, \dots, |L_h|$ et supposons que le premier, $|L_1|$ contiennent les courbes $2K$. Soient $|K'|, |L'_1|, |L'_2|, \dots, |L'_h|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur F' aux systèmes $|K|, |L_1|, |L_2|, \dots, |L_h|$.

Le système $|L'_1|$ ne peut être adjoint à $|K'|$, sans quoi F' posséderait un système canonique. Les courbes L'_1 découpent donc sur une courbe K' une série paracanonique et a la dimension $\pi + p_a - 2$.

Supposons que les systèmes $|L'_2|, |L'_3|, \dots, |L'_h|$ découpent sur une courbe K' des séries paracanoniques. Comme ils ne contiennent pas $|K'|$ comme partie, ils ont la dimension $\pi - 2$ et d'après la théorie des homographies, on a

$$\pi + p_a - 2 + (h - 1)(a - 2) + h = p_a + p^{(1)},$$

c'est-à-dire

$$h(\pi - 1) = p(\pi - 1) + 1,$$

ce qui est absurde.

Il existe donc un des systèmes $|L'_2|, |L'_3|, \dots, |L'_h|$, par exemple $|L'_2|$, découpant sur une courbe K' la série canonique et sa dimension est $\pi - 1$.

En utilisant la théorie des homographies, on en déduit $h = p$.

Le système bicanonique de F' a la dimension $\pi - 1$ et il lui correspond sur F un système appartenant à $|L|$. Donc le système bicanonique de F' est l'un des systèmes $|L'_1|, |L'_2|, \dots, |L'_p|$. Ce ne peut être $|L'_1|$, qui a la dimension $\pi + p_a - 2 > \pi$, puisque par hypothèse $p_a > 2$. Ce ne peut être non plus l'un des systèmes $|L'_3|, \dots, |L'_p|$, qui ont la dimension $\pi - 2$. Ce doit donc être $|L'_2|$, qui a effectivement la dimension $\pi - 1$.

L'adjoint à $|L'_1| = |2K'|$ est $|L'_2 + K'|$. L'adjoint à ce dernier système est $|2L'_2|$, donc le système bicanonique est $|2L'_2 - L'_1|$. Mais alors, on a

$$2L'_2 - L'_1 \equiv L'_2,$$

d'où $L'_1 \equiv L'_2$, ce qui est absurde.

La proposition énoncée au début est donc établie.

Liège, le 25 novembre 1949.