

GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

**Recherches sur les points unis isolés des involutions
cycliques appartenant à une surface algébrique,**

par LUCIEN GODEAUX,

Membre de l'Académie.

(Première communication)

Considérons une involution cyclique I_p , d'ordre premier p , n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F . Soit A un point uni non parfait ($p > 2$) de cette involution, c'est-à-dire un point uni qui ne possède, dans son domaine du premier ordre, que deux points unis pour l'involution. Le point A est l'origine d'une sorte d'arbre formé de points unis infiniment voisins successifs, chaque branche de l'arbre étant terminée par un point uni parfait ⁽¹⁾. Une courbe tracée sur F , appartenant à l'involution I_p , et passant par A , possède en général un point multiple en A . Sur cette courbe, ce point est l'origine d'un certain nombre de branches qui épousent, dans le voisinage de A , certaines branches de l'arbre dont il vient d'être question. La détermination des éléments précédents, c'est-à-dire de la structure du point uni, est un problème dont nous nous sommes occupé à diverses reprises ⁽²⁾. Ce travail est une nouvelle contribution à ce problème. Nous y avons repris, en lui donnant plus de généralité, une méthode que nous avons esquissée dans une note anté-

⁽¹⁾ *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUALITÉS SCIENT. ET INDUST., n° 270 ; Paris, Hermann, 1935). *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (MÉMOIRES in-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938).

⁽²⁾ *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (BULL. DE LA SOC. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1940, pp. 54-79, 128-137). Voir également les notes précédemment citées et certaines notes qui seront citées plus loin.

rieure ⁽¹⁾ et utilisée dans quelques cas particuliers.

A la fin de cette note, nous appliquerons notre méthode à certains cas simples, c'est-à-dire aux premières valeurs de p .

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p , d'ordre premier $p > 2$, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons construire, sur la surface F , un système linéaire complet $|C|$, simple, de dimension R aussi grande qu'on le veut, comprenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p , l'un de ces systèmes partiels étant dépourvu de points base. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S_R à R dimensions, nous transformons F en une surface normale que nous désignerons dorénavant par F . Sur cette surface F , l'involution cyclique I_p est engendrée par une homographie H , de période p ⁽²⁾.

L'homographie H étant périodique est générale. Soient $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(p-1)}$ les axes ponctuels de cette homographie, $r_0, r_1, \dots, r_{p-1}$ leurs dimensions. Nous désignerons par $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{p-1}$ les gerbes d'hyperplans unis, les hyperplans de Σ_i passant par les axes $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \dots, S^{(p-1)}$. Les hyperplans de Σ_i découpent, sur F , les courbes d'un système linéaire $|C_i|$ appartenant à l'involution I_p . Des p systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p ainsi obtenus, l'un, $|C_0|$, est dépourvu de points-base. Il en résulte que les axes $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ de H ne rencontrent pas la surface F . Seul l'espace $S^{(0)}$ peut rencontrer cette surface ; il contient donc les points unis de l'involution I_p .

⁽¹⁾ Remarque sur l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (BULLETIN DE LA SOC. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1941, pp. 290-295).

⁽²⁾ Les involutions cycliques... (loc. cit.).

La dimension r_0 de $|C_0|$ peut être supposée aussi grande qu'on le veut ; nous la supposerons au moins égale à trois. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, F se transforme en une surface Φ , image de l'involution I_p . Nous désignerons par n l'ordre de la surface Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes. Les courbes C_0 et par suite les courbes C sont de degré pn et de genre $p(\pi - 1) + 1$. La surface F est d'ordre pn .

2. Considérons un point A uni non parfait de l'involution I_p . Il appartient à l'axe $S^{(0)}$ de l'homographie H et le plan tangent α à F en ce point n'a que le point A commun avec $S^{(0)}$. Le plan α est d'autre part uni pour l'homographie H et doit donc s'appuyer en une droite sur un des axes $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ ou en un point sur deux de ces axes. Comme le point A doit être uni non parfait, c'est le second cas qui doit se présenter. Nous supposerons que le plan α s'appuie en un point A_1 sur l'espace $S^{(1)}$ et en un point A_k sur l'espace $S^{(k)}$, ($1 < k \leq p - 1$).

Observons que d'après la théorie des homographies, on a

$$r_0 + r_1 + \dots + r_{p-1} + p = R + 1.$$

Dans l'espace S_R , nous pouvons donc choisir la figure de référence de telle sorte que les axes de H appartiennent à des hyperplans de cette figure. Dans ces conditions, l'homographie H aura pour équations

$$\rho x'_i = \epsilon^j x_i, \quad (i = 0, 1, \dots, R; \quad j = 0, 1, \dots, p - 1)$$

$\epsilon = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Choisissons une valeur j et égalons à zéro les coordonnées correspondant à toutes les autres valeurs de j ; nous obtenons ainsi les équations d'un axe ponctuel de H . Il en résulte qu'à chacun de ces axes est attachée une

racine primitive d'ordre p de l'unité. On peut toujours supposer que la racine $\epsilon^p = 1$ est attachée à $S^{(0)}$ et la racine ϵ à $S^{(1)}$. Nous désignerons alors par $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots, \epsilon^k, \dots, \epsilon^{p-1}$ les racines attachées respectivement aux axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \dots, S^{(k)}, \dots, S^{(p-1)}$.

Dans le plan tangent α à F en A , H détermine une homographie non homologique dont les points unis sont $A(1, 0, 0)$, $A_1(0, 1, 0)$ et $A_k(0, 0, 1)$. Les équations de cette homographie sont

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^k x_3.$$

3. Désignons par C'_0 les courbes C_0 assujetties à passer par le point A . Elles ont en ce point une certaine multiplicité ρ_1 , les tangentes en ce point étant confondues avec les droites AA_1, AA_k .

Appelons C''_0 les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite de α distincte des droites AA_1, AA_k . Les courbes C''_0 ont en A une certaine multiplicité $\rho_2 > \rho_1$, les tangentes en ce point à ces courbes étant confondues avec les droites AA_1, AA_k , ou bien les courbes C''_0 ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Dans le premier cas, nous considérerons les courbes C''_0 assujetties à toucher en A une droite de α distincte de AA_1, AA_k , et ainsi de suite. Comme il existe dans $|C_0|$ un système partiel formé de courbes ayant en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables ⁽¹⁾, nous obtiendrons, dans le cas général ν systèmes linéaires

$$|C'_0|, |C''_0|, \dots, |C^{(\nu)}_0|,$$

de courbes ayant respectivement en A les multiplicités $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{\nu-1} < p$; les $\nu - 1$ premiers systèmes ont en A les tangentes fixes AA_1, AA_k . Les courbes $C^{(\nu)}_0$ du dernier système ont en A la multiplicité p , les tangentes étant variables.

⁽¹⁾ Les involutions cycliques... (loc. cit.).

Les systèmes $|C'_0|, |C''_0|, \dots, |C^{(p)}_0|$ appartiennent évidemment à l'involution I_p , de sorte que le nombre des points d'intersection de deux courbes de deux quelconques de ces systèmes, distincts ou non, absorbés en A, est un multiple de p .

4. Les hyperplans de la gerbe Σ_1 contiennent les axes $S^{(0)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}, \dots, S^{(p-1)}$, par conséquent, ils coupent le plan α suivant la droite AA_k . Il en résulte que les courbes C_1 ont en A un point simple et y touchent la droite AA_k .

Puisque les systèmes $|C_0|, |C'_0|, \dots, |C^{(p)}_0|$ et le système $|C_1|$ appartiennent à l'involution I_p , le nombre des points d'intersection de C_1 avec chacune des courbes $C'_0, C''_0, \dots, C^{(p)}_0$ absorbés en A est multiple de p . Si nous désignons par $x_1, x_2, \dots, x_p$ ces nombres, nous avons

$$p_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p.$$

Or, nous avons $x_p = p$, puisque les courbes $C^{(p)}_0$ et C_1 n'ont en général aucune tangente commune en A. Il en résulte que l'on a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = p.$$

Les courbes C_1 rencontrent chacune des courbes $C'_0, C''_0, \dots, C^{(p)}_0$ en p points confondus en A.

Les hyperplans de la gerbe Σ_k coupent le plan α suivant la droite AA_1 , par conséquent les courbes C_k ont un point simple en A et y touchent la droite AA_1 . On démontre, comme dans le cas des courbes C_1 , qu'une courbe C_k rencontre chacune des courbes $C^{(1)}_0, C^{(2)}_0, \dots, C^{(p)}_0$ en p points confondus en A.

Observons qu'une courbe C_1 et une courbe C_k n'ont qu'un point d'intersection absorbé en A, mais ces courbes passent par les autres points unis de I_p et la somme

des intersections de ces deux courbes absorbées aux différents points unis de I_p est multiple de p .

5. Considérons maintenant le système $|2 C|$, c'est-à-dire le système découpé sur F par les hyperquadriques de S_R ne contenant pas cette surface. Ce système est transformé en lui-même par H et contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p .

L'un de ces systèmes, que nous désignerons par $|(2 C)_0|$ contient les couples de courbes C_0 ; il est dépourvu de points-base.

Nous désignerons les autres systèmes par $|(2 C)_1|$, $|(2 C)_2|$, ..., $|(2 C)_{p-1}|$ et nous supposons que le système $|(2 C)_i|$ contient les courbes $C_0 + C_i$. Dans ces conditions, aux p systèmes $|(2 C)_0|$, $|(2 C)_1|$, ..., $|(2 C)_{p-1}|$ sont respectivement attachés les nombres 1, ϵ , ..., ϵ^{p-1} .

Observons que le système $|(2 C)_0|$ comprend les courbes $C_1 + C_{p-1}$, $C_2 + C_{p-2}$, ... ; le système $|(2 C)_1|$ les courbes $C_2 + C_{p-1}$, $C_3 + C_{p-2}$, ..., et ainsi de suite.

Les courbes $(2 C)_1$, $(2 C)_2$, ..., $(2 C)_{p-1}$ se comportent, d'après ce qui précède, de la même manière au point A que les courbes C_1 , C_2 , ..., C_{p-1} .

Désignons par $(2 C)'_0$ les courbes $2 C_0$ assujetties à passer par le point A . Le système linéaire $|(2 C)'_0|$ comprend les courbes $C_0 + C'_0$ et les courbes $(2 C)'_0$ se comportent en A de la même manière que les courbes C'_0 . On définira de même les courbes $(2 C)''_0$, $(2 C)'''_0$, ..., $(2 C)^{(p)}_0$; ces courbes se comportent au point A de la même manière que les courbes C''_0 , C'''_0 , ..., $C^{(p)}_0$.

Nous pouvons également considérer, sur la surface F , les systèmes linéaires complets $|3 C|$, $|4 C|$, ..., $|p C|$. Chacun d'eux contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p . Nous désignerons par $|(\lambda C)_0|$, $|(\lambda C)_1|$, ..., $|(\lambda C)_{p-1}|$ les systèmes linéaires partiels appartenant au système $|\lambda C|$, le système $|(\lambda C)_i|$

étant celui qui contient les courbes $C_i + (\lambda - 1) C_0$ et auquel est attaché le nombre ϵ^i .

Nous définirons de même les systèmes linéaires $|(\lambda C)_0|$, $|(\lambda C)_0''|$, ..., $|(\lambda C)_0^{(p)}|$ par la condition qu'ils contiennent respectivement les courbes $C'_0 + (\lambda - 1) C_0$, $C''_0 + (\lambda - 1) C_0, \dots, C_0^{(p)} + (\lambda - 1) C_0$.

Les systèmes $|\lambda C|$, ($\lambda = 2, 3, \dots, p$) ont le même comportement en A que le système $|C|$.

6. Notre but est d'obtenir des renseignements sur le comportement au point A des courbes $C_2, C_3, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_{p-1}$.

Envisageons en premier lieu le système $|C_{k+1}|$. Le courbes C_{k+1} se comportent au point A de la même manière que les courbes $(2 C)_{k+1}$. Or, le système $|(2C)_{k+1}|$ comprend les courbes $C_1 + C_k$; par conséquent, il existe dans le système $|C_{k+1}|$ des courbes ayant un point double en A, les tangentes étant les droites AA_1, AA_k . Ces courbes sont-elles les plus générales parmi les courbes C_{k+1} ?

Supposant en premier lieu que l'on ait $k = p - 1$. Alors, le système $|C_{k+1}|$ coïncide avec le système $|C_0|$ et les courbes qui viennent d'être rencontrées coïncident avec les courbes C'_0 . On a dans ces conditions $\rho_1 = 2$.

Supposons maintenant $k < p - 1$. Les courbes C_{k+1} sont découpées sur F par les hyperplans de la gerbe Σ_{k+1} , qui contiennent les axes $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(k)}$ de l'homographie H et par conséquent le plan tangent α à F en A. Les courbes C_{k+1} ont donc un point au moins double en A et par conséquent exactement un point double d'après ce qu'on vient de voir.

Envisageons maintenant le système $|C_{k+2}|$. Les courbes C_{k+2} se comportent au point A de la même manière que les courbes $(2 C)_{k+2}$. Le système formé par ces courbes comprend les courbes $C_1 + C_{k+1}$ et par conséquent les courbes C_{k+2} ont un point triple en A; deux

des tangentes coïncident avec AA_k et une avec AA_1 . Si $k = p - 2$, ces courbes sont des courbes C'_0 ou des courbes C''_0 . Si ce sont des courbes C''_0 , on a nécessairement $\rho_1 = 2$, car les hyperplans de Σ_0 découpant les courbes C'_0 passent par A et contiennent le plan α . Les courbes C'_0 ont un point au moins double en A . Mais alors, les courbes $C_0 + C'_0 - C_1$ doivent coïncider avec les courbes C_k et on aurait $k = p - 1$, ce qui est absurde. Si $k = p - 2$, les courbes C'_0 ont donc un point triple en A , deux tangentes étant confondues avec AA_k et une avec AA_1 . On a $\rho_1 = 3$.

Supposons en second lieu $k < p - 2$. Les courbes C_{k+2} ont en A une multiplicité au plus égale à trois, les tangentes étant confondues avec AA_1 et AA_k . Les hyperplans de Σ_{k+2} contenant le plan α , la multiplicité en A des courbes C_{k+2} est au moins égale à deux. Si elle était égale à deux, les courbes $C_0 + C_{k+2} - C_1$ coïncideraient avec les courbes C_k , ce qui est impossible, donc les courbes C_{k+2} ont bien en A la multiplicité trois, deux tangentes étant confondues avec AA_k et une avec AA_1 .

Désignons par h le reste de la division de $2k + 1$ par p . Le système $|(2C)_h|$ comprend les courbes $C_{k+1} + C_k$, qui ont un point triple en A , deux tangentes coïncident avec AA_1 et une avec AA_k . Nous aurons encore deux cas à envisager.

Si $2k + 1 = p$, d'où $h = 0$, les courbes C_h coïncident avec les courbes C'_0 et on a $\rho_1 = 3$.

Si h n'est pas nul, on obtient le comportement des courbes C_h au point A .

7. L'application répétée du raisonnement précédent conduit à la détermination du comportement en A des courbes $C_2, C_3, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_{p-1}$. Cependant, il ne peut être utilisé sans précautions. Dans les cas que nous venons d'examiner, nous avons trouvé, pour les

multiplicités des courbes considérées, des valeurs assez petites, 2 ou 3. Soit h un nombre positif, entier, inférieur à p . Considérons les entiers λ, μ , positifs, satisfaisant à la congruence

$$\lambda + \mu k \equiv h, \quad (\text{mod. } p)$$

et tels que $\lambda + \mu \leq p$.

Les courbes $\lambda C_1 + \mu C_k$ appartiennent au système linéaire $|(\lambda + \mu - 1) C_0 + C_n|$. Il en résulte que les courbes C_n ont en A une multiplicité égale à la plus faible des multiplicités en A des courbes $\lambda C_1 + \mu C_k$.

Envisageons un cas particulier. Posons $p = 2\eta + 1$ et supposons $k = \eta - 2$, $h = \eta - 4$. Nous devons chercher les entiers positifs λ, μ tels que

$$\lambda + \mu (\eta - 2) \equiv \eta - 4, \quad (\text{mod. } p)$$

$$\lambda + \mu \leq p.$$

Nous avons les solutions $\lambda = 2\eta - 1$, $\mu = 1$; $\lambda = 5t - 2$, $\mu = 2t + 1$, où t est un entier positif au plus égal à $\frac{1}{7}(2\eta + 3)$; $\lambda = \eta + 5t - 4$, $\mu = 2t$, où t est un entier positif au plus égal à $\frac{1}{7}(\eta - 5)$; $\lambda = 0$ et une valeur de μ que nous examinerons plus loin.

Les courbes $(2\eta - 1) C_1 + C_k$ ont la multiplicité $p - 1$ en A.

Les courbes $(5t - 2) C_1 + (2t + 1) C_k$ ont la multiplicité $7t - 1$ en A. La valeur minimum est donnée par $t = 1$ et on trouve alors les courbes $3 C_1 + 3 C_k$, qui ont un point sextuple en A.

Les courbes $(\eta + 5t - 4) C_1 + 2t C_k$ ont en A la multiplicité $\eta + 7t - 4$. La valeur minimum est atteinte pour $t = 0$. Les courbes $(\eta - 4) C_1$ ont alors la multiplicité $\eta - 4$ en A.

Considérons maintenant les courbes μC_k , $\mu(\eta - 2)$ divisé par p donnant pour reste $\eta - 4$. Voyons dans

quelles conditions la multiplicité de A pour ces courbes sera au plus égale à 6 ; on aura alors $\mu \leq 6$. En tenant compte du fait que η doit être supérieur à 4 et que de plus, si $\eta = 5$, les courbes C_h coïncident avec les courbes C_1 , on trouve une seule solution : $\eta = 10$, $\mu = 6$.

Supposons maintenant $\eta > 6$. Parmi les courbes qui viennent d'être considérées, celles qui ont la multiplicité minimum en A sont les courbes $3 C_1 + 3 C_k$. Les courbes C_h ont donc en A un point sextuple, trois tangentes étant confondues avec AA_1 et les trois autres avec AA_k .

Le cas $\eta = 10$ doit être éliminé ; car nous avons $p = 21$ contrairement à l'hypothèse que p est premier.

Si $\eta < 10$, ce sont les courbes $(\eta - 4) C_1$ qui ont la multiplicité minimum en A et les $\eta - 4$ tangentes coïncident avec AA_k . Observons que l'on doit avoir dans ce cas $\eta = 6, 8$ ou 9 pour que p soit premier.

8. Supposons que l'on ait trouvé la multiplicité de A pour les courbes $C_1, C_2, \dots, C_{p-1}$ et le nombre des tangentes à ces courbes en ce point confondues avec AA_1 et avec AA_k . Les courbes $C_1 + C_{p-1}, C_2 + C_{p-2}, \dots, C_\eta + C_{\eta+1}$ appartiennent au système $|(2 C)_0|$. Celles de ces courbes qui ont la multiplicité minimum en A coïncident avec les courbes $C_0 + C'_0$; on aura ainsi la multiplicité des courbes C_0 en A et le nombre des tangentes à ces courbes en ce point qui coïncident soit avec AA_1 , soit avec AA_k .

Il convient cependant de faire une observation. Le procédé que nous utilisons ici nous donne la multiplicité des courbes $C_1, C_0, \dots, C_{p-1}, C'_0$ en A et le nombre des tangentes à ces courbes en ce point qui coïncident avec AA_1, AA_k , mais rien de plus. Le procédé ne fournit aucun renseignement précis sur le comportement des courbes considérées aux points infiniment voisins de A unis pour l'homographie H. Nous allons considérer deux exemples, que nous avons déjà eu l'occasion de

traiter par d'autres méthodes, et nous insisterons, à propos de ces exemples, sur la remarque qui vient d'être faite.

9. Supposons en premier lieu $k = p - 1$. En poursuivant le raisonnement que nous avons fait, il est facile de voir que les courbes $C_2, C_3, \dots, C_\eta$ se comportent en A comme les courbes $2 C_1, 3 C_1, \dots, \eta C_1$, les courbes $C_{\eta+1}, C_{\eta+2}, \dots, C_{p-2}$ se comportant en A comme les courbes $\eta C_{p-1}, (\eta - 1) C_{p-1}, \dots, 2 C_{p-1}$. Les courbes C_i ont donc en A la multiplicité i et i tangentes confondues avec AA_{p-1} en ce point, pour $i = 1, 2, \dots, \eta$; elles ont en A le multiplicité $p - i$ et $p - i$ tangentes confondues avec AA_1 pour $i = \eta + 1, \eta + 2, \dots, 2 \eta$.

Cela étant, les courbes $C_1 + C_{p-2}, C_2 + C_{p-2}, \dots, C_\eta + C_{\eta+1}$ font respectivement partie des systèmes $|(2 C)'_0|, |(2 C)''_0|, \dots, |(2 C)^{(\eta)}_0|$.

Les courbes C'_0 ont donc un point double en A , les tangentes étant AA_1 et AA_2 . Comme les courbes C_1, C_{p-1} doivent rencontrer les courbes C'_0 en p points confondus en A , on en conclut que les courbes C'_0 ont en commun $p - 2$ points simples infiniment voisins successifs de A , le premier se trouvant sur AA_1 et $p - 2$ points simples, infiniment voisins successifs de A , le premier se trouvant sur AA_{p-1} .

Les courbes C''_0 ont en A la multiplicité quatre, deux tangentes étant confondues avec AA_1 et deux avec AA_{p-1} . Mais on ne peut plus rien conclure concernant le comportement des courbes C''_0 aux points infiniment voisins de A , car les courbes C_1, C_{p-1} rencontrent les courbes C''_0 en p points confondus en A .

De même, les courbes $C^{(i)}_0$ ont un point multiple d'ordre $2i$ en A , i tangentes étant confondues avec AA_1 et i avec AA_{p-1} ($i = 2, 3, \dots, \eta$). Mais ces courbes étant rencontrées en p points confondus en A par les courbes C_1, C_{p-1} , on ne peut rien conclure touchant le comporte-

ment des courbes considérés aux points infiniment voisins de A.

D'autres méthodes nous ont permis de résoudre ces questions dans le cas particulier ($k = p - 1$) envisagé ici ⁽¹⁾.

10. Envisageons maintenant le cas $k = 2$. Actuellement, on voit aisément que les courbes C_{2i} se comportent en A comme les courbes iC_2 et les courbes C_{2i+1} comme les courbes $C_1 + iC_2$. Les premières ont donc en A un point multiple d'ordre i , les i tangentes étant confondues avec AA_1 ; les secondes ont en A la multiplicité $i + 1$, i tangentes étant confondues avec AA_1 et une avec AA_2 .

Considérons les courbes $C_j + C_{p-j}$, qui appartiennent au système $|(2C)_0|$. Si j est pair : $j = 2i$, les courbes considérées ont en A la multiplicité $\eta + 1$, η tangentes étant confondues avec AA_1 et une avec AA_2 . On arrive à la même conclusion si j est impair. Il en résulte que les courbes C'_0 ont la multiplicité $\eta + 1$ en A, avec η tangentes confondues avec AA_1 et une avec AA_2 .

On peut conclure de ce qui précède que les courbes C'_0 ont en commun, en A, une suite de η points simples fixes, infiniment voisins successifs, le premier se trouvant sur AA_2 . Cela résulte du fait que les courbes C'_0 sont rencontrées en p points confondus en A par les courbes C_1 (tangentes en A à la droite AA_2).

La propriété des courbes C_2 de rencontrer les courbes C_0 en p points confondus en A ne nous permet pas de déterminer quels sont les points infiniment voisins du point du domaine du premier ordre de A situé sur AA_1 ,

⁽¹⁾ Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, (2^e note). BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1931, pp. 1131-1150); Sur la structure des points unis des involutions... (loc. cit.); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1938, pp. 193-222); Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (REVISTA DE L'UNIVERSIDAD DE TUCUMAN, 1940, pp. 283-291).

communs aux courbes C'_0 . Nous allons y parvenir de la manière suivante :

Les courbes $3C_1 + (\eta - 1)C_2$ appartiennent au système $|(\{\eta + 2\}C)_0|$. Elles ont en A la multiplicité $\eta + 2$. D'autre part, les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de AA_1, AA_2 , c'est-à-dire les courbes C''_0 , ont en A une multiplicité supérieure à $\eta + 1$. On en conclut que les courbes $3C_1 + (\eta - 1)C_2$ appartiennent au système $|(\{\eta + 2\}C''_0)|$. Les courbes C''_0 ont donc en A la multiplicité $\eta + 2$, trois tangentes coïncidant avec AA_2 et $\eta - 1$ avec AA_1 .

Les courbes $5C_1 + (\eta - 2)C_2$ appartiennent au système $|(\{\eta + 3\}C)_0|$ et on voit, en répétant le raisonnement précédent, que les courbes C'''_0 ont en A la multiplicité $\eta + 3$, cinq tangentes coïncidant avec AA_2 et $\eta - 2$ avec AA_1 .

D'une manière générale, les courbes $(2i + 1)C_1 + (\eta - i)C_2$ appartiennent au système $|(\{\eta + i + 1\}C)_0|$ et on en déduit que les courbes $C_0^{(i+1)}$ ont en A la multiplicité $\eta + i + 1$, $2i + 1$ tangentes coïncidant avec AA_2 et $\eta - i$ avec AA_1 .

Pour $i = \eta - 1$, on obtient les courbes $C_0^{(\eta)}$ qui ont en A la multiplicité 2η et $2\eta - 1$ tangentes coïncidant avec AA_2 , une seule avec AA_1 . Les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes $C_0^{(\eta)}$ en p points confondus en A ; on en conclut que les courbes $C_0^{(\eta)}$ ont en commun un seul point fixe, A'_1 infiniment voisin de A sur AA_1 . Ce point est nécessairement uni parfait pour l'involution I_p . Il en résulte que les courbes $C'_0, C''_0, \dots, C_0^{(i+1)}$ ont en A'_1 respectivement les multiplicités $\eta, \eta - 1, \dots, \eta - i, \dots$.

Nous retrouvons ainsi des résultats obtenus autrefois par une autre méthode ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, première note (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1930, pp. 450-467).

11. Commençons par supposer $p = 5$. Nous aurons à considérer trois cas, suivant que k est égal à 2, 3 ou 4. Observons cependant que le second cas se ramène au premier en posant $\omega = \epsilon^3$; on a alors en effet $\omega^2 = \epsilon$.

Considérons le premier cas: $k = 2$. Les courbes C_1 passent simplement par le point A en y touchant AA_2 et les courbes C_2 passent également simplement par le point A en y touchant AA_1 .

Les courbes C_3 ont un point double en A, les tangentes étant AA_1 et AA_2 . Les courbes C_4 ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec AA_1 .

Les courbes C'_0 ont un point triple en A, deux tangentes étant confondues avec AA_1 et une avec AA_2 . Les courbes C''_0 ont un point quadruple en A, trois tangentes étant confondues avec AA_2 et une avec AA_1 .

On en conclut (cf. n° 10) que le point A'_1 infiniment voisin de A sur AA_1 est uni parfait pour I_5 . Il y a d'autre part deux points A'_2, A''_2 , infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur AA_2 , unis pour I_5 . Le point A''_3 est uni parfait pour cette involution.

Les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes C''_0 en cinq points confondus en A, donc le point A'_2 est simple pour les courbes C''_0 . Comme dans la suite A, A'_2, A''_2 , le point A'_2 précède le point uni parfait A''_2 , il ne peut être lui-même uni parfait. D'ailleurs, dans ce cas, deux courbes C''_0 auraient en commun en A, 18 points d'intersection confondus, ce qui est impossible, puisque ce nombre doit être multiple de cinq. Il en résulte que les courbes C''_0 ont en commun des points unis $B_1, B_2, \dots$ infiniment voisins successifs de A'_2 , le dernier étant uni parfait. Les courbes C'''_0 ont en A un point quintuple à tangentes variables et deux de ces courbes ont 25 points d'intersection absorbés en A. Il en résulte que deux courbes C''_0 ont un nombre de points d'intersection absorbés en A inférieur à 25, supérieur à 18 et multiple de 5, c'est-à-dire 20. Par conséquent, le point B_2 est uni parfait.

Nous avons vu que les courbes C_3 ont un point double en A , les tangentes étant AA_1 et AA_2 . Les courbes C_3 passent donc par les points A'_1, A'_2 . Le nombre de points d'intersection d'une courbe C_3 et d'une courbe C'_0 ou C''_0 absorbés en A doit être multiple de 5. Si l'on observe que le point A'_1 est double pour les courbes C'_0 , un calcul simple montre que les courbes C_3 doivent passer par A''_2 .

Les courbes C_4 devant rencontrer les courbes C'_0, C''_0 en un nombre de points multiple de cinq absorbés en A , on voit que ces courbes ont un point double en A et un point double infiniment voisin en A'_1 .

12. Passons à l'examen du cas $k = 4$. Les courbes C_1 ont un point simple en A et y touchent la droite AA_4 . Les courbes C_4 ont un point simple en A et y touchent la droite AA_1 . Les courbes C_2 ont un point double en A et les deux tangentes sont confondues avec AA_4 . Les courbes C_3 ont un point double en A et les deux tangentes coïncident avec AA_1 .

Les courbes C'_0 ont un point double en A , les tangentes étant AA_1 et AA_4 . Les courbes C''_0 ont un point quadruple en A , deux tangentes étant confondues avec AA_1 , les deux autres avec AA_4 . Les courbes C'''_0 ont un point quintuple à tangentes variables en A .

Les courbes C_1, C_4 devant rencontrer les courbes C'_0 en cinq points confondus en A , on en conclut que ces courbes C'_0 ont en commun trois points simples infiniment voisins successifs A'_1, A''_1, A'''_1 dont le premier est sur AA_1 et trois points simples infiniment voisins successifs A'_4, A''_4, A'''_4 dont le premier est sur AA_4 . Deux courbes C'_0 ont en commun dix points absorbés en A .

Les courbes C_1, C_4 doivent rencontrer les courbes C''_0 en cinq points confondus en A , donc les courbes C''_0 passent simplement par les points A'_1, A'_4 . Elles doivent de plus passer par un point uni au moins infiniment voisin de A'_1 et par un point uni au moins infiniment

voisin de A'_4 , car les points A'_1, A'_4 ne peuvent être unis parfaits. Deux courbes C''_0 ont en A un nombre de points d'intersection multiple de 5, donc ces courbes passent par un point uni parfait B_1 infiniment voisin de A'_1 et par un point uni parfait B_4 infiniment voisin de A'_4 .

Les courbes C_2 doivent rencontrer les courbes C'_0, C''_0 en un nombre de points multiple de cinq confondus en A, dont les courbes C_2 ont un point double en A et passent simplement par les points A'_4, B_4 .

De même, les courbes C_3 passent doublement par A et simplement par les points A'_1, B_1 .

13. Supposons maintenant $p = 7$. Nous avons à envisager les hypothèses $k = 2, 3, 4, 5, 6$. L'hypothèse $k = 4$ se ramène par un changement de notation à $k = 2$ et l'hypothèse $k = 5$ à $k = 3$.

Supposons en premier lieu $k = 2$. Les courbes C_1 ont un point simple en A et y touchent la droite AA_2 . Les courbes C_2 ont un point simple en A et y touchent la droite AA_1 . Les courbes C_3 ont un point double en A, les tangentes étant AA_1 et AA_2 . Les courbes C_4 ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec AA_1 . Les courbes C_5 ont un point triple en A, une tangente étant AA_2 et les deux autres sont confondues avec AA_1 . Enfin, les courbes C_6 ont un point triple en A, les trois tangentes étant confondues avec AA_1 .

Les courbes C'_0 ont un point quadruple en A, trois tangentes étant confondues avec AA_1 et la dernière étant AA_2 . Les courbes C''_0 ont un point quintuple en A, deux tangentes étant confondues avec AA_1 et trois avec AA_2 . Les courbes C'''_0 ont un point sextuple en A, une tangente étant confondue avec AA_1 et les cinq autres avec AA_2 . Enfin, les courbes $C^{(4)}_0$ ont un point multiple d'ordre 7, à tangentes variables, en A.

En reprenant le raisonnement fait plus haut (n° 10), on voit que les courbes C'_0 ont en commun un point A'_1 ,

multiple d'ordre trois, infiniment voisin de A sur AA_1 , et trois points simples A'_2, A''_2, A'''_2 infiniment voisins successifs de A , le point A'_2 appartenant à AA_2 .

Considérons les courbes C''_0 . Une courbe C_2 les rencontre en sept points confondus en A , donc A'_1 , qui est un point uni parfait, est double pour les courbes C''_0 . Une courbe C_1 doit rencontrer les courbes C''_0 en sept points confondus en A , les cas suivants peuvent se présenter :

a) Les courbes C''_0 passent simplement par A'_2, A''_2 et ont encore en commun quatre points B_1, B_2, B_3, B_4 infiniment voisins successifs de A''_2 . (On voit que les points B_i sont au nombre de quatre en comptant les intersections de deux courbes C''_0 absorbées en A , nombre qui doit être multiple de sept).

b) Les courbes C''_0 ont un point double en A'_2 et passent simplement par deux points B'_1, B'_2 infiniment voisins successifs de A'_2 .

Les courbes C_3 doivent rencontrer les courbes C'_0, C''_0, C'''_0 en des nombres de points confondus en A , multiples de 7. On en conclut que ces courbes, qui ont un point double en A , passent simplement par les points $A'_1, A'_2, A''_2, A'''_2$.

Les courbes C_4 possèdent la même propriété et ont par suite un point double en A et un point double A'_1 infiniment voisin du premier.

Considérons maintenant les courbes C'''_0 , qui ont un point sextuple en A . Les courbes C_1, C_2 doivent rencontrer les courbes C'''_0 en sept points confondus en A , donc les courbes C'''_0 passent simplement par les points A'_1, A'_2 . Le point A'_2 n'étant pas uni parfait, les courbes C'''_0 ont encore en commun un certain nombre de points simples, infiniment voisins successifs de A'_2 , unis pour I_7 . En exprimant que deux courbes C'''_0 ont en commun des points confondus en A en nombre multiple de 7, on voit que ces points sont au nombre de quatre.

Supposons que les courbes C_0'' passent simplement par les points A_2' , A_2'' (alternative a). Alors une courbe C_0'' et une courbe C_0''' ont en commun 33 points confondus en A , ce qui est impossible, puisque ce nombre doit être multiple de sept. C'est donc l'alternative b qui doit se présenter pour les courbes C_0'' . Mais alors, les courbes C_0''' passent par le point B_1' , infiniment voisin de A_2' et par trois points B_1'' , B_2'' , B_3'' , unis, infiniment voisins successifs de B_1' (B_1'' étant distinct de B_2'').

En exprimant que les intersections d'une courbe C_5 avec les courbes C_0' , C_0'' , C_0''' confondues en A sont en nombre multiple de 7, on trouve aisément que les courbes C_5 , qui ont un point triple en A , passent deux fois par A_1' et une fois par A_2' , A_2'' , A_2''' .

De même, les courbes C_5 ont deux points triples infiniment voisins A , A_1' .

14. Nous allons maintenant supposer $k = 3$.

Les courbes C_1 passent simplement par le point A en y touchant AA_3 . Les courbes C_3 passent simplement par A en y touchant AA_1 . Les courbes C_4 ont un point double en A , les tangentes étant AA_1 , AA_3 . Les courbes C_2 ont un point double en A , les deux tangentes étant confondues avec AA_3 . Les courbes C_6 ont un point double en A , les deux tangentes étant confondues avec AA_1 . Enfin, les courbes C_5 ont un point triple en A , une tangente étant AA_1 et les deux autres étant confondues en AA_3 .

Les courbes C_0' ont par conséquent un point triple en A , deux tangentes étant confondues avec AA_1 et une avec AA_3 . Les courbes C_0'' ont un point quintuple en A , quatre tangentes étant confondues avec AA_3 et une avec AA_1 . Les courbes C_0''' ont un point multiple d'ordre six, quatre tangentes étant confondues avec AA_1 et deux avec AA_3 . Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A un point multiple d'ordre sept à tangentes variables.

Désignons par $A'_1, A''_1, \dots$, les points infiniment voisins successifs de A situés sur les courbes C_3 et par $A'_3, A''_3, \dots$ les points infiniment voisins successifs de A situés sur les courbes C_1 . Le point A'_1 appartient donc à AA_1 et le point A'_3 à AA_3 .

Si l'on tient compte des intersections des courbes C_1, C_3 avec les courbes C'_0 absorbées en A , nombres qui doivent être égaux à 7, on voit que quatre cas peuvent se présenter :

a) Les courbes C'_0 ont deux points doubles A'_1, A''_1 et quatre points simples $A'_3, A''_3, A'''_3, A^{(4)}_3$, les points A''_1 et $A^{(4)}_3$ étant unis parfaits.

b) Les courbes C'_0 ont un point double A'_1 , deux points simples A''_1, A'''_1 et quatre points simples $A'_3, \dots, A^{(4)}_3$.

c) Les courbes C'_0 ont quatre points simples $A'_1, \dots, A^{(4)}_1$ et quatre points simples $A'_3, \dots, A^{(4)}_3$.

d) Les courbes C'_0 ont un point double A'_1 , un point simple A''_1 , un point simple B infiniment voisin de A'_1 , et quatre points simples $A'_3, \dots, A^{(4)}_3$.

Mais dans les trois derniers cas, deux courbes C'_0 ont respectivement 19, 17 et 19 points d'intersection réunis en A ; ce nombre devant être multiple de sept, seul le premier cas peut se présenter. Dans ce cas, deux courbes C'_0 ont 21 points d'intersection réunis en A .

Envisageons maintenant les courbes C''_0 . Trois cas peuvent se présenter :

a) Les courbes C''_0 passent cinq fois par A , une fois par A'_1, A''_1 , deux fois par A'_3 et deux fois par un point B_3 infiniment voisin de A'_3 .

b) Les courbes C''_0 passent cinq fois par A , une fois par A'_1, A''_1 , une fois par A'_3, A''_3 et une fois par six points $B_3, B'_3, \dots, B^{(5)}_3$ infiniment voisins successifs de A'_3 .

c) Les courbes C''_3 passent cinq fois par A , une fois

par A'_1, A''_1 , deux fois par A'_3 et une fois par quatre points B_3, B'_3, B''_3, B'''_3 infiniment voisins successifs de A'''_3 .

Les courbes C'''_0 , qui ont un point sextuple en A , passent simplement par les points A'_1, A'_3 et ne peuvent passer par A''_1, A''_3 . Elles passent donc par un point au moins infiniment voisin de A'_1 et par un point au moins infiniment voisin de A'_3 , car deux courbes C'''_0 doivent avoir 42 points d'intersection réunis en A .

Si les courbes C'''_0 présentent le cas b , une courbe C'''_0 et une courbe C'''_0 auraient 32 points d'intersection réunis en A . Ce nombre devant être multiple de 7, le cas b ne peut se présenter.

Si c'est le cas c qui se présente, pour que une courbe C'''_0 et une courbe C'''_0 aient 35 points d'intersection réunis en A , il faut que les courbes C'''_0 passent par les points B_3, B'_3, B''_3 . Mais alors, ce point n'étant pas uni parfait, les courbes C'''_0 doivent passer par un point au moins infiniment voisin de B'_3 , distinct de B'''_3 . Comme elles passent par un point au moins infiniment voisin de A'_1 , deux courbes C'''_0 auraient au moins 43 points d'intersection confondus en A , alors que ce nombre doit être multiple de 7 et inférieur à 49. Le cas c est donc à exclure.

Reste le cas a . Les courbes C'''_0 passent une fois par A'_3, B_3 , une fois par A'_1 et une fois par trois points B_1, B'_1, B''_1 infiniment voisins successifs de A'_1 .

Il nous reste à déterminer les comportements des courbes C_2, C_4, C_5, C_6 au point A . En utilisant le fait que chacune de ces courbes doit rencontrer chacune des courbes C'_0, C''_0, C'''_0 en un nombre de points multiple de sept absorbés en A , on arrive facilement aux résultats suivants :

Les courbes C_2 passent doublement par les points $A, A'_3, A''_3, A'''_3, A^{(4)}_3$.

Les courbes C_4 passent doublement par A et simplement par les points $A'_1, A''_1, A'_3, A''_3, A'''_3, A^{(4)}_3$.

Les courbes C_5 passent trois fois par A , une fois par A'_1, A'_2 , deux fois par $A'_3, A''_3, A'''_3, A^{(4)}_3$.

Les courbes C_6 passent deux fois par A, A'_1, A''_1 .

15. Nous considérons enfin l'hypothèse $k = 6$, qui va nous donner ce que nous avons appelé un point uni symétrique.

Les courbes C_1 et C_6 passent simplement par A , les premières en y touchant la droite $A_1 A'$, les secondes en y touchant la droite AA_1 .

Les courbes C_2 ont un point double en A , les deux tangentes étant confondues avec AA_6 .

Les courbes C_3 ont un point triple en A , les trois tangentes étant confondues avec la droite AA_6 .

Les courbes C_4 ont un point triple en A , les trois tangentes étant confondues avec la droite AA_1 .

Les courbes C_5 ont un point double en A , les deux tangentes étant confondues avec la droite AA_1 .

Les courbes C'_0 ont un point double en A , les tangentes étant AA_1, AA_6 .

Les courbes C''_0 ont un point quadruple en A , deux tangentes étant confondues avec AA_1 et les deux autres avec AA_6 .

Les courbes C'''_0 ont un point sextuple en A , trois tangentes étant confondues avec AA_1 et les trois autres avec AA_6 .

Les courbes $C^{(4)}_0$ ont la multiplicité sept en A , les tangentes étant variables.

Les courbes C'_0 ont en commun une suite de cinq points simples $A'_1, A''_1, \dots, A^{(5)}_1$, infiniment voisins successifs, le premier étant sur AA_1 , et une suite de cinq points $A'_6, A''_6, \dots, A^{(5)}_6$ dont le premier est sur AA_6 .

Pour les courbes C''_0 , deux cas peuvent se présenter :

a) Les courbes C''_0 ont un point quadruple en A , des

points doubles en A'_1 , A'_6 , des points simples en A''_1 , A''_6 , un point simple B_1 infiniment voisin de A''_1 et un point simple B_6 infiniment voisin de A''_6 ;

b) Les courbes ont un point quadruple en A , passant simplement par les points A'_1 , A''_1 , A'''_1 , par les points A'_6 , A''_6 , A'''_6 et ont encore en commun un certain nombre de points simples infiniment voisins successifs de A''_1 , un certain nombre de points simples infiniment voisins successifs de A''_6 , le nombre total de ces points étant six.

Les courbes C'''_0 ont un point sextuple en A et passent par conséquent simplement par les points A'_1 , A''_6 . Si le cas b se présentait pour les courbes C''_6 , une de ces courbes et une courbe C'''_0 auraient en commun 26 points confondus en A , ce qui est impossible, puisque ce nombre doit être multiple de 7. C'est donc le cas a qui doit se présenter. Les courbes C''_0 et C'''_0 ont alors 28 points d'intersection absorbés en A .

Les courbes C'''_0 doivent en outre avoir un certain nombre de points simples infiniment voisins successifs de A'_1 et un certain nombre de points simples infiniment voisins successifs de A'_6 , le nombre total de ces points étant 4.

Les courbes C_3 , qui ont un point triple en A , les trois tangentes étant confondues avec AA_6 , doivent rencontrer les courbes C'_0 , C''_0 en un nombre multiple de 7 de points confondus en A , par conséquent, elles passent simplement par le point A'_6 et ont encore en commun un certain nombre de points simples infiniment voisins de A'_6 . De même, les courbes C_4 ont un point triple en A , un point simple en A'_1 et passent par un certain nombre de points simples infiniment voisins successifs de A'_1 . En exprimant que les courbes C_3 , C_4 rencontrent les courbes C'''_0 en un nombre multiple de 7 de points confondus en A , on voit qu'il existe deux points B'_1 , B''_1 infiniment voisins successifs de A'_1 , simples pour les courbes C'''_0 ,

C_4 et deux points B'_6, B''_6 , infiniment voisins successifs de A'_0 , simples pour les courbes C'''_0 et C_2 .

Les courbes C_2 devant rencontrer les courbes C'_0, C''_0, C'''_0 en un nombre multiple de 7 de points confondus en A , ont des points doubles en A, A'_6 et des points simples en A''_6, B_6 .

De même, les courbes C_5 ont des points doubles en A, A'_1 et passent simplement par les points A''_1, B_1 .

Liège, le 5 mars 1948.