EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 15 avril 1948. — N° 4.

Sur la structure des points unis isoles des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans un travail récent (¹), nous avons apporté une nouvelle contribution à la détermination de la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Cette note fait suite à ces recherches; nous y étudierons un cas particulier en utilisant, en même temps que la méthode introduite dans le travail cité, une autre méthode que nous avons utilisée autrefois (²). Rappelons brièvement en quoi consiste cette méthode.

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis; $|C|$ un système linéaire privé de points-base, appartenant à l'involution, et A un point uni non parfait de celle-ci. Les courbes C passant par A acquièrent en ce point une certaine multiplicité ρ et ont ρ_1 tangentes confondues avec une des directions unies issues de A, $\rho_2 = \rho - \rho_1$ tangentes confondues avec l'autre direction unie. Appelons C' les courbes C passant par A. Transformons birationnellement F en une surface F', de telle sorte qu'au point A corresponde une courbe exceptionnelle a. Soient A_1, A_2 les points de a qui correspondent aux directions unies issues de A sur F. Si A_1 par exemple, est uni parfait pour l'involution I'_p qui, sur F', correspond à I_p, ce point est multiple d'ordre ρ_1, à tangentes variables, pour les transformées des courbes C'. Si au contraire A_1 est uni non parfait pour I'_p, il y a deux directions unies issues de A_1 : l'une est la tangente à a en A_1, l'autre passe par un point infiniment voisin de A_1, que nous désignerons par A'_1. Les transformées des courbes C' ont en A_1 une certaine multiplicité $\rho'_1 \leq \rho_1$ et rencontrent la courbe a en ρ_1 points confondus en A_1. Si le point A'_1 est multiple d'ordre ρ''_1 pour les courbes envisagées, le point A_0 de a, infiniment voisin de A_1, est au plus multiple d'ordre $\rho'_1 - \rho''_1$ pour les courbes envisagées.

(¹) Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1948, pp. 206-228, 299-311).

(²) Sur des points de diramation des surfaces multiples (*Bull. Soc. roy. Sc. Liège*, 1940, pp. 54-79, 128-137).

Si la multiplicité de ce point est inférieure à $\rho'_1 - \rho''_1$, il existe un point uni de I'_p, infiniment voisin de A_0, mais non situé sur a, appartenant aux transformées des courbes C'.

1. Nous avons montré que l'on peut toujours prendre comme modèle projectif d'une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, une surface normale F, d'ordre pn, d'un espace linéaire S_r, sur laquelle l'involution est engendrée par une homographie H, cyclique de période p. De plus, on peut supposer que H possède p axes ponctuels $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(p-1)}$, de dimensions $r_0, r_1, \dots, r_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F (aux points unis de l'involution). On peut d'ailleurs supposer r_0 aussi grand qu'on le veut.

En rapportant projectivement les hyperplans de S_r passant par $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ aux hyperplans d'un espace S_{r_0}, on transforme F en une surface Φ, normale, d'ordre n, image de l'involution I_p.

Nous supposerons p premier et nous poserons $p = 2\nu + 1$. Soit A un point uni de l'involution I_p, appartenant donc à $S^{(0)}$ Le plan tangent α à F en A est uni pour l'homographie H et nous supposerons qu'il s'appuie en un point sur $S^{(1)}$ et en un point sur $S^{(\nu)}$. Nous désignerons par A_0 le point qui correspond à A sur Φ et notre but est d'étudier la structure du point uni A et celle du point de diramation A_0. Rappelons qu'à chacun des espaces $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(p-1)}$, nous avons attaché une racine de l'unité; si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, ces racines seront respectivement $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$.

Nous désignerons par C les sections hyperplanes de F, par C_i les sections faites par les hyperplans passant par les axes de H, sauf par $S^{(i)}$. Nous avons, dans le système $|C|$, p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p Le premier est dépourvu de points-base, les autres ont pour points-base les points unis de I_p. A ces p systèmes correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|, |\Gamma_1|, \dots, |\Gamma_{p-1}|$ où $|\Gamma_i|$ est l'homologue de $|C_i|$. Le système $|\Gamma_0|$ est formé par les sections hyperplanes de la surface Φ.

Nous désignerons par a_1, a_ν les tangentes à F en A qui s'appuient sur $S^{(1)}$ et $S^{(\nu)}$. Désignons encore par C'_0 les courbes C passant par A. Ces courbes ont en A un point multiple, les tangentes étant confondues avec a_1 et a_ν. Les courbes C'_0, assujetties à toucher en A une droite de α distincte de a_1, a_ν, acquièrent en ce point une multiplicité supérieure. les tangentes étant toujours confondues avec a_1, a_ν; nous les désignerons par C_0''. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à des courbes C_0 ayant en A la multiplicité p et p tangentes variables. Nous préciserons plus loin ces notations.

2. Les courbes C_1 sont découpées sur F par des hyperplans rencontrant le plan α suivant la droite a_ν et par conséquent ces courbes ont un point simple en A et y touchent a_ν. De même, les courbes C_ν passent simplement par A en y touchant la droite a_1.

Nous avons établi que les courbes C_0', C_0'',... se comportaient en A comme les courbes $\lambda C_1 + \mu C_\nu$, où λ, μ sont des entiers tels que

$$0 \leq \lambda + \mu \leq p, \qquad \lambda + \mu\nu \equiv 0, \qquad (\text{mod. p}).$$

En dehors des solutions $\lambda = p$, $\mu = 0$ et $\lambda = 0$, $\mu = p$, on a les solutions

$$\lambda = i, \ \mu = 2i; \qquad \lambda = \nu + j + 1, \qquad \mu = 2j + 1,$$

i et j étant des entiers tels que

$$1 \leq 3i \leq 2\nu + 1, \qquad 0 \leq 3j \leq \nu - 1.$$

p étant premier; ν est de la forme $3\nu'$ ou $3\nu' + 2$.

Dans le premier cas, $\nu = 3\nu'$, $p = 6\nu' + 1$, on a

$$1 \leq i \leq 2\nu', \qquad 0 \leq j \leq \nu' - 1.$$

Dans le second, $\nu = 3\nu' + 2$, $p = 6\nu' + 5$, on a

$$1 \leq i \leq 2\nu' + 1, \qquad 0 \leq j \leq \nu'.$$

Nous rangerons ces systèmes $|\lambda C_1 + \mu C_\nu|$ dans l'ordre des multiplicités croissantes du point A pour leurs courbes. On sait que les courbes $C_0^{(k)}$ ont en A le même comportement que le système de rang k ainsi obtenu. Dans les deux cas, il y a ν de ces systèmes et nous aurons à considérer les systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., $|C_0^{(\nu)}|$. Le système $|C_0^{(\nu+1)}|$ est formé de courbes ayant en A la multiplicité p et des tangentes variables. Les courbes C_0' sont en A un point triple, deux tangentes coïncidant avec a_1 et une avec a_ν.

Les systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$,..., $|C_0^{(\nu)}|$, $|C_0^{(\nu+1)}|$ ont respectivement les dimensions $r_0 - 1$, $r_0 - 2$, ..., $r_0 - \nu$, $r_0 - \nu - 1$. En rapportant projectivement les courbes $C_0^{(i)}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - i$ dimensions, on obtient une surface que nous désignerons par Φ_i. Il est clair que la surface Φ_i est projectivement identique à la projection, à partir d'un de ses points, de la surface Φ_{i-1}. En particulier, la surface Φ_1 est projectivement identique à la projection de Φ, à partir du point A_0, sur un hyperplan de S_{r_0} ne passant pas par A_0.

La surface Φ est d'ordre n; la surface $\Phi_{\nu+1}$ est d'ordre $n-p$. Dans les différentes projections qui permettent de passer de Φ à $\Phi_{\nu+1}$, il y a donc p unités perdues, ce qui donne une indication sur la multiplicité des centres de projection pour les surfaces correspondantes.

3. Nous supposerons $p > 0$, donc $\nu > 1$, les involutions d'ordre trois étant bien connues.

Les courbes C'_0 ont en A un point triple, avec deux tangentes confondues avec a_1 et une avec a_ν. Les courbes C_1, C_ν doivent rencontrer les courbes C'_0 en p points confondus en A; donc les courbes C'_0 ont en commun une suite de $2\nu-2$ points simples infiniment voisins successifs, $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots, A_{\nu 2\nu-2}$, dont le premier est infiniment voisin de A sur a_ν. Ces points sont unis par I_p et le dernier est uni parfait pour cette involution.

Les courbes C'_0 ont également en commun une suite de points infiniment voisins successifs de A dont le premier est sur a_1. Trois cas peuvent se présenter :

1° Cette suite se compose de x_2 points doubles, suivis de x_1 points simples, appartenant aux courbes C_ν. On a donc

$$3 + x_1 + 2x_2 = 2\nu + 1, \quad \text{ou} \quad x_1 + 2x_2 = 2\nu - 2.$$

2° La suite se compose de x_2 points doubles situés sur les courbes C_ν, le dernier étant suivi de x_1 points simples situés sur les courbes C_ν et, dans une autre direction, de x'_1 points simples infiniment voisins successifs.

3° La suite se compose de x_2 points doubles situés sur les courbes C_ν.

Au domaine du point $A_{\nu 2\nu-2}$ correspond sur la surface Φ_1 une droite γ_1. Au domaine du dernier point de la seconde suite, dans le premier cas, correspond une droite γ_2. Il en résulte que A_0 est double biplanaire pour Φ. L'ordre de Φ_1 est donc $n - 2$ et le point A absorbe $2p$ points d'intersection des courbes C'_0. On doit donc avoir

$$x_1 + 4x_2 = 2\nu - 5,$$

ce qui est incompatible avec la relation précédente.

Dans le second cas, le point A_0 est triple triplanaire pour Φ et le point A absorbe $3p$ points d'intersection de deux courbes C'_0. Nous avons

$$x_1 + x'_1 + 4\,x_2 = 4\,\nu - 4.$$

Désignons par π le genre des courbes Γ_0; les courbes Γ_0' sont actuellement de genre $\pi - 2$. Les courbes C_0 sont de genre $p(\pi - 1) - x_2 - 2$. Entre une courbe Γ_0' et la courbe C_0' correspondante, nous aurons une correspondance $(1.\ p)$ présentant trois points de diramation. La formule de Zeuthen donne $x_2 = \nu - 1$, d'où $x_1 = x_1' = 0$, et nous arrivons à une contradiction.

Reste la troisième hypothèse. On a alors $x_2 = \nu - 1$, c'est-à-dire que les courbes C_0' ont en commun une suite de $\nu - 1$ points doubles $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1\,\nu-1}$, infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur a_1. Ces points sont unis pour I_p et le dernier est uni parfait. A son domaine correspond sur Φ' une conique γ_2 et le point A_0 est triple pour Φ, le cône tangent étant formé du plan projetant la droite γ_1 de A_0 et du cône quadratique projetant γ_2 du même point. La surface Φ' est d'ordre $n - 3$ et le point A absorbe $3\,p$ points d'intersection de deux courbes C_0'. Les courbes Γ_0' sont de genre $\pi - 2$ et les courbes C_0' de genre $p(\pi - 2) - \nu - 1$.

Les courbes Γ_0'' sont découpées sur Φ' par les hyperplans passant par un point A_0', appartenant à la droite γ_1 et à la conique γ_2. C'est le seul point commun à γ_1 et γ_2.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \gamma_1 + \gamma_2;$$

on en conclut que γ_1 est de degré -2 et γ_2 de degré -3.

4. Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité six, quatre tangentes étant confondues avec a_1 et deux avec a_ν.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 5$. En effet, le point A_0' correspond au point infiniment voisin de A_0 situé sur la droite commune au plan et au cône quadratique tangent à Φ en A_0; donc ce point est au plus double pour Φ et par conséquent A_0' est au plus double pour Φ_1. D'autre part, lorsqu'on passe de Φ_1 à $\Phi_{\nu+1}$, l'ordre des surfaces Φ s'abaisse de $2\nu - 2$ unités; il faut donc que les ordres des premières surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ diffèrent de deux unités au moins. On en conclut que A_0' est double pour Φ_1 et que Φ_2 est donc d'ordre $n - 5$. Le point A absorbe donc $5\,p$ unités dans l'intersection de deux courbes C_0''.

Les courbes C_0'' passent deux fois par les x premiers des points $A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu\,2\nu-2}$. Le $(x + 1)$-ième point de cette suite est simple pour les courbes et celles-ci passent en outre simplement par un point infiniment voisin de ce dernier point. Comme, d'autre part, les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes C_0'' en p points confondus en A, on a $x = \nu - 3$. Les courbes C_0'' passent donc doublement par les points $A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu\nu-3}$, simplement par le point $A_{\nu\nu-2}$ et par un point A_1, distinct de $A_{\nu\nu-1}$, infiniment voisin de $A_{\nu\nu-2}$. Ce point A_{ν_1} est uni parfait pour l'involution I_p; à son domaine du premier ordre correspond, sur Φ_2, une droite γ_1. Observons que, dans la projection de Φ_1 sur Φ_2 à partir de A'_3, à la droite γ_1 correspond un point double conique de Φ_2, situé sur γ'_1.

Aux courbes C''_0 correspondent sur Φ_1 les sections de cette surface par les hyperplans passant par A'_0; il en résulte que les courbes Γ''_0 rencontrent en un point variable la conique γ_2 et que par suite les courbes C''_0 ont un point simple à tangente variable en $A_{1\nu-1}$. Les courbes C''_0 ont des points quadruples en $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1x}$ et deux cas peuvent alors se présenter : Le point $A_{1\,x+1}$ est triple pour les courbes C''_0; celles-ci passent simplement par $A_{1\,x+2}, \ldots, A_{\nu-1}$, et simplement par un point A'_{11} infiniment voisin de A_{1x+1} et simplement par un point A'_{12} infiniment voisin de A'_{11}. Ou bien les courbes C''_0 passent deux fois par A_{1x+1} et une fois par deux points simples A'_{11}, A'_{12} infiniment voisins successifs de $A_{1\,x+1}$. Comme les courbes C_ν coupent les courbes C''_0 en p points confondus en A, on a, dans le premier cas,

$$6 + 4x + 3 + \nu - x - 2 = 2\nu + 1,$$

donc $3x = \nu - 6$. On a nécessairement $\nu = 3\nu'$ et $x = \nu' = 2$.

Dans le second cas, on a

$$6 + 4x + 2 + \nu - x - 2 = 2\nu + 1;$$

d'où $3x = \nu - 5$. On a nécessairement $\nu = 3\nu' + 2$ et $x = \nu' - 1$.

Dans les deux cas, on trouve bien que deux courbes C''_0 ont $5p$ points d'intersection absorbés en A. Au domaine du point A'_{12} correspond sur Φ_2 une droite γ'_2 s'appuyant en un point sur la droite $\bar{\gamma}_2$, projection de γ_2 à partir de A'_0 et rencontrant en un point A''_0 la droite γ'_0. Le point A'_0 est donc double biplanaire pour la surface Φ_1.

Dans les deux cas, les courbes Γ''_0 sont de genre $\pi - 3$ et les courbes C''_0 de genre $p(\pi - 1) + 1 - 3\nu - 3$. Entre une courbe Γ''_0 et la courbe C'_0 homologue, on a une correspondance $(1, p)$ présentant trois points de diramation. La formule de Zeuthen, appliquée à cette correspondance, conduit à une identité.

On vérifie qu'une courbe C'_0 et une courbe C''_0 ont $3p$ points d'intersection absorbés en A.

5. Supposons que l'on ait $\nu > 7$; alors, les courbes C'''_0 ont en

A la multiplicité 9, avec six tangentes confondues avec a_1 et trois avec a_ν (3).

Les courbes C_0''' passent trois fois par les x premiers points $A_{\nu 1}$, $A_{\nu 2}$, ... et soit deux fois par le point $A_{\nu x+1}$, soit une fois par ce point. Dans le premier cas, elles ont encore deux points simples infiniment voisins successifs de $A_{\nu x+1}$ en commun ; dans le second cas, elles en ont également deux. Les courbes C_1 rencontrant les courbes C_0''' en p points confondus en A, les cas suivants peuvent se présenter :

a) $\nu = 3\nu' + 2$, $x = 2\nu' - 2$. Le point $A_{\nu 2\nu'-1}$ est double pour les courbes C_0''' et celles-ci ont encore en commun deux points simples $A'_{\nu 1}$, $A'_{\nu 2}$, le dernier étant uni parfait pour l'involution I_p ;

b) $\nu = 3\nu'$, $x = 2\nu' - 3$. Le point $A_{\nu 2\nu'-2}$ est simple pour les courbes C_0''' et celles-ci passent encore simplement par deux points $A''_{\nu 1}$, $A''_{\nu 2}$ infiniment voisins successifs de $A_{\nu 2\nu'-2}$, le dernier étant uni parfait pour I_p.

Les courbes C_0''' passent six fois par les x premiers points A_{11}, A_{12}, ... et h fois par le point suivant ($h < 6$). Observons que sur la surface Φ_3, que l'on obtient en projetant Φ_2 du point A''_0, à la droite $\overline{\gamma}_2$ correspond une droite, donc les courbes C_0''' passent simplement par le point $A_{1\nu-1}$ et par conséquent simplement par les $\nu - x - 2$ derniers des points A_{11}, A_{12}, ..., $A_{1\nu-1}$, Les courbes C_ν rencontrant les courbes C_0''' en p points confondus en A, on a

$$9 + 6x + h + \nu - x - 2 = 2\nu + 1 ;$$

d'où

$$5x + h = \nu - 6.$$

Observons que, p étant premier, on ne peut avoir $\nu = 5\nu'' + 2$. Cela étant, les cas suivants peuvent se présenter :

α) $h = 5$, $\nu = 5\nu'' + 1$, $x = \nu'' - 2$. Au point quintuple $A_{1\nu''-1}$, font suite quatre points infiniment voisins successifs, A''_{11}, A''_{12}, A''_{13}, A''_{14}, simples pour les courbes C_0''', dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

β) $h = 4$, $\nu = 5\nu''$, $x = \nu'' - 2$. Au point quadruple $A_{1\nu''-1}$ sont infiniment voisins successifs, soit quatre points simples, soit un point double suivi de deux points simples, le dernier point étant dans chaque cas uni parfait pour I_p.

---

(3) Si l'on avait $\nu < 7$, les courbes C'''_0 auraient en A la multiplicité $\nu+2$, avec $\nu+1$ tangentes confondues avec a_ν et une avec a_1.

γ) $h=3$, $\nu=5\nu''+4$, $x=\nu''-1$. Au point triple $A_{1\nu''}$ sont infiniment voisins successifs, soit une suite de quatre points simples, soit un point double suivi de deux points simples.

δ) $h=2$, $\nu=5\nu''+3$, $x=\nu''-1$. Au point double $A_{1\nu''}$ sont infiniment voisins successifs quatre points simples, dont le dernier est uni parfait pour I_p.

Exprimons maintenant que le nombre des points d'intersection de deux courbes C_0''' absorbés en A est multiple de p. Cela conduit à exclure, dans le cas β, l'hypothèse de quatre points simples infiniment voisins successifs de $A_{1\nu''-1}$, et, dans le cas γ, celle d'une suite de quatre points simples infiniment voisins successifs de $A_{1\nu''}$.

Dans les autres hypothèses, on trouve que le nombre de points absorbés est $7p$, donc la surface Φ_3 est d'ordre $n-7$. Le point A_0'' est donc double pour la surface Φ_2 et précisément double biplanaire. En effet, aux domaines des points-unis de I_p pour lesquels se terminent les suites de points communs aux courbes C_0''', distincts de $A_{1\nu-1}$, correspondent des droites sur la surface Φ_3.

Les courbes C_0''' sont de genre $p(\pi-1)+1-5\nu-4$; les courbes Γ_0''' sont de genre $\pi-4$. Si l'on applique la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, p)$ existant entre une courbe Γ_0''' et la courbe C_0''' homologue, correspondance qui possède trois points de diramation, on obtient une identité.

6. Nous allons maintenant nous occuper des systèmes de courbes $|C_0^{(\nu-1)}|$, $|C_0^{(\nu)}|$. Nous supposerons en premier lieu $\nu=3\nu'$. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont dans cette hypothèse la multiplicité 2ν en A, $4\nu'$ tangentes étant confondues avec a_1 et $2\nu'$ avec a_ν.

Comme les courbes C_1, C_ν doivent rencontrer les courbes $C_0^{(\nu)}$ en $p=2\nu+1$ points confondus en A, ces dernières courbes ont des points simples en A_{11}, $A_{\nu 1}$. Il en résulte qu'elles passent encore par $4\nu'-1$ points simples $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1\,4\nu'-1}$ infiniment voisins successifs de A_{ν_1}. Les derniers points de ces suites sont unis parfaits pour l'involution I_p.

Le point A absorbe $2\nu p$ points d'intersection de deux courbes $C_0^{(\nu)}$ et la surface Φ_ν est donc d'ordre $n-2\nu$. On passe donc de cette surface à la surface $\Phi_{\nu+1}$. d'ordre $n-p$, en la projetant d'un de ses points simples.

Les sections hyperplanes de la surface Φ_ν sont de genre $\pi-\nu$.

Aux domaines des points $B_{1\,4\nu'-1}$, $B_{\nu\,2\nu'-1}$ correspondent sur Φ_ν des droites que nous désignerons par β_1, β_ν.

Les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ ont en A la multiplicité $2\nu - 1$, $2\nu' - 1$ tangentes étant confondues avec a_1 et $\nu + \nu' = 4\nu'$ avec a_ν. Les points A_{11} et $A_{\nu 1}$ sont au plus doubles et nécessairement doubles pour les courbes $C_0^{(\nu-1)}$. Elles ont des points doubles en $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1\nu'-2}$, un point simple en $B_{1\nu'-1}$ et enfin un point simple, uni parfait pour I_p, B_1', infiniment voisin de $B_{1\nu'-1}$. Elles ont en outre des points doubles en $B_{\nu_1}, B_{\nu_2}, \dots, {}_{\nu 2\nu'-1}$.

Le point A absorbe $4\nu^2 - 1$ points d'intersection de deux courbes $C_0^{(\nu-1)}$, donc la surface $\Phi_{\nu-1}$ est d'ordre $n - 2\nu + 1$. Au domaine du point B_1' correspond sur $\Phi_{\nu-1}$ une droite B_1' et au domaine du point $B_{\nu 2\nu'-1}$ correspond une conique β_2'. Aux courbes $C_0^{(\nu)}$ correspondent sur $\Phi_{\nu-1}$ les sections de cette surface par les hyperplans passant par un point $A_0^{(\nu-1)}$, appartenant à la droite β_1' et à la conique β_2', simple pour la surface. On obtient Φ_ν en projetant $\Phi_{\nu-1}$ de $A_0^{(\nu-1)}$; au domaine de ce point correspond sur Φ_ν la droite β_1.

Les sections hyperplanes de la surface $\Phi_{\nu-1}$ sont de genre $\pi - \nu$, comme on le voit en utilisant la formule de Zeuthen.

Supposons maintenant $\nu = 3\nu' + 2$. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont encore la multiplicité 2ν en A, mais elles ont cette fois $2\nu' + 1$ tangentes confondues avec a_1 et $\nu + \nu' + 1$ avec a_ν.

Les courbes $C_0^{(\nu)}$ passent simplement par le point A_{11} et par une suite de $2\nu'$ points $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{12\nu'}$ infiniment voisins successifs, le dernier étant uni parfait pour I_p. Elles passent en outre simplement par $A_{\nu 1}$ et par une suite de $4\nu'$ points $B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \dots, B_{\nu 4\nu}$ points infiniment voisins successifs, dont le dernier est uni parfait pour I_p.

La surface Φ_ν est encore d'ordre $n - 2\nu$ et aux domaines des points $B_{12\nu'}$, $B_{\nu 4\nu'}$ correspondent sur cette surface des droites β_1, β_ν.

Les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ ont en A la multiplicité $2\nu - 1$, $4\nu' + 2$ tangentes coïncidant avec a_1 et $2\nu' + 1$ avec a_ν. Les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ ont des points doubles en A_{11}, $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{12\nu'}$, de même des points doubles en $A_{\nu 1}$, $B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \dots, B_{\nu\nu'-1}$, un point simple en $B_{\nu\nu'}$ et un point simple B_ν' infiniment voisin. La surface $\Phi_{\nu-1}$ est d'ordre $n - 2\nu + 1$; au domaine du point $B_{12\nu'}$ correspond sur cette surface une conique β_1' et au domaine du point B_ν' correspond une droite B_ν' rencontrant la conique β_1' en un point $A_0^{(\nu-1)}$, simple pour la surface. La droite β_1 est la projection de la conique β_1' à partir de $A_0^{(\nu-1)}$, tandis qu'au domaine de ce point correspond la droite β_2.

Que ν soit égal à $3\nu'$ ou à $3\nu' + 2$, les surfaces $\Phi_{\nu-1}$, Φ_ν présentent donc les mêmes particularités; ce sont les structures du point A pour les courbes $C_0^{(\nu-1)}$, $C_0^{(\nu)}$ qui diffèrent.

7. Nous avons vu qu'au domaine du point $A_{1\nu-1}$ correspond sur Φ_1 une conique γ_2. Les courbes C_0'', $C_0'^4$ passent simplement par $A_{1\nu-1}$ et par conséquent les courbes Γ_0'', Γ_0''' qui leur correspondent sur Φ_1 rencontrent en un point la conique γ_2. Par contre, les courbes $C_0^{(\nu-1)}$, $C_0^{(\nu)}$ ne passent que par $A_{1\nu-1}$ et les courbes $\Gamma_0^{(\nu-1)}$, $\Gamma_0^{(\nu)}$ qui leur correspondent sur Φ_1 ne rencontrent pas γ_2.

Pour qu'une courbe $C_0^{(k)}$ passe par $A_{1\nu-1}$ et que la courbe $\Gamma_0^{(k)}$ qui lui correspond sur Φ_1 rencontre γ_2, il faut que la multiplicité de A pour ces courbes $C_0^{(k)}$ soit au plus égale à $\nu+2$. En effet, pour que la courbe $C_0^{(k)}$ passe par $A_{1\nu-1}$, il faut qu'elle passe par les points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1\nu-2}$ et comme les courbes C_ν doivent les rencontrer en p points confondus en A, la multiplicité de ce point doit être au plus égale à $p-(\nu-1)$.

Si les courbes $C_0^{(k)}$ ont en A la multiplicité $3i$, avec $2i$ tangentes confondues avec a_1 et i avec a_ν, on doit donc avoir $3i \leq \nu+2$. Si $\nu = 3\nu'$, on doit donc avoir $i \leq \nu'$ et si $\nu = 3\nu'+2$, on doit avoir $i \leq \nu'+1$.

Si les courbes $C_0^{(k)}$ ont en A la multiplicité $\nu+3j+2$, on doit avoir $3j \leq 0$, c'est-à-dire $j=0$.

Nous avons numéroté les systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, ... d'après les multiplicités décroissantes de leurs courbes en A. Si $\nu = 3\nu'$, le système $|C_0^{(\nu')}|$ a en A la multiplicité $3\nu'$, avec $2\nu'$ tangentes confondues avec a_1 et ν' avec a_ν. Le système $|C_0^{(\nu'+1)}|$ a en A la multiplicité $\nu+2$, avec une tangente confondue avec a_1 et $\nu+1$ confondues avec a_ν. Le système $|C_0^{(\nu'+2)}|$ a en A la multiplicité $3\nu'+3$, avec $2\nu'+2$ tangentes confondues avec a_1 et $\nu'+1$ avec a_ν.

Si $\nu = 3\nu'+2$, le système $|C_0^{(\nu'+1)}|$ a en A la multiplicité $3\nu'+3$, avec $2\nu'+2$ tangentes confondues avec a_1 et $\nu'+1$ avec a_ν. On a $3\nu'+3 = \nu+1$. Les courbes $C_0^{(\nu'+2)}$ ont en A la multiplicité $\nu+2$, avec une tangente confondue avec a_1 et $\nu+1$ confondues avec a_ν. Les courbes $C_0^{(\nu'+3)}$ ont en A la multiplicité $3\nu'+6 = \nu+4$, avec $2\nu'+4$ tangentes confondues avec a_1 et $\nu'+2$ confondues avec a_ν.

Dans le cas $\nu = 3\nu'$, les courbes $C_0^{(\nu'+1)}$ devant rencontrer les courbes C_ν en p points confondus en A, doivent passer simplement par $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1\nu-1}$. Les courbes $\Gamma_0^{(\nu'+1)}$ qui leur correspondent sur Φ_1 doivent donc rencontrer la conique γ_2 en un point. Il en résulte que les courbes $C_0^{(4)}, C_0^{(5)}, \ldots, C_0^{(\nu')}$ passent simplement par $A_{1\nu-1}$ et que les courbes $\Gamma_0^{(4)}, \Gamma_0^{(5)}, \ldots, \Gamma_0^{(\nu')}$ qui leur correspondent sur Φ_1 rencontrent en un point la conique γ_2. Par conséquent, sur chacune des surfaces $\Phi_4, \Phi_5, \ldots, \Phi_{\nu+1}$, il correspond une droite au domaine du point $A_{1\nu-1}$, la droite d'une surface étant la projection de la droite de la surface précédente. Par contre, les courbes $C_0^{(\nu'+2)}$ ne peuvent passer par $A_{1\,\nu-1}$ et il ne peut correspondre au domaine de ce point, sur la surface $\Phi_{\nu'+2}$, autre chose qu'un point. Il en résulte que $\Phi_{\nu'+2}$ est la projection de $\Phi_{\nu'+1}$ à partir d'un point $A_0^{(\nu'+1)}$ de cette surface appartennt à la droite correspondant à γ_2.

On arrive à des conclusions analogues lorsque $\nu = 3\nu' + 2$, sauf que c'est la surface $\Phi_{\nu'+2}$ qui est la dernière à posséder une droite représentant le domaine du point $A_{1\,\nu-1}$.

8. Considérons les courbes $C_0^{(i)}$, où $i \leq \nu'$ si $\nu = 3\,\nu'$ et $i \leq \nu'+1$ si $\nu = 3\,\nu' + 2$.

Ces courbes doivent passer $2\,i$ fois par les x premiers points de la suite $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1\,\nu-1}$, k fois par le suivant et une fois par les autres. On a

$$(2i - 1)\,x + k = \nu - 3\,(i - 1).$$

On a évidemment $k < 2i$. Les courbes $C_0^{(i)}$ ont en outre en commun un certain nombre de points infiniment voisins successifs du point $A_{1\,x+1}$, multiple d'ordre k. Le nombre et la multiplicité de ces points dépendent de la valeur k; ces éléments seront déterminés comme dans le cas $i = 2, 3$.

Les courbes $C_0^{(i)}$ passent i fois par les y premiers points de la suite $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \dots, A_{\nu\,2\nu-2}$, k' fois par le suivant et ne passent plus par les autres. En tenant compte du fait que les courbes C_1 rencontrent les courbes $C_0^{(i)}$ en p points confondus en A, on doit avoir

$$i\,y + k' = 2\nu - 3i + 1.$$

k' est inférieur à i. Au dernier point de la suite, multiple d'ordre k', sont infiniment voisins successifs un certain nombre de points communs aux courbes $C_0^{(i)}$, dont le nombre et la multiplicité dépendent de la valeur de k'.

Nous allons maintenant supposer $\nu = 3\nu'$ pour plus de simplicité et nous occuper des courbes $C_0^{(\nu'+1)}$. Dans le cas $\nu = 3\nu' + 2$, les raisonnements, qui concernent alors les courbes $C_0^{(\nu'+2)}$, sont analogues.

Nous avons vu que les courbes $C_0^{(\nu'+1)}$ passent simplement par les points $A_{11}, \dots, A_{1\,\nu-1}$. Elles ont la multiplicité $\nu + 2$ en A, ont ν tangentes confondues avec a_ν et doivent rencontrer les courbes C_1 en p points confondus en A. Soient $x_1, x_2, x_3, \dots$ les multiplicités des points $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, A_{\nu 3}, \dots$ pour les courbes $C_0^{(\nu'+1)}$; nous devons avoir

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \nu - 1$$

et par conséquent $x_1 \leq \nu - 1$. Il en résulte que les courbes passent certainement par le point B_1, infiniment voisin de A_{ν_1}, car elles ont $\nu + 1$ tangentes confondues avec a_ν. On aura donc $x_2 < x_1$ et la multiplicité du point $B_{\nu 1}$ sera au plus égale à $x_1 - x_2$. Si cette multiplicité est inférieure à ce nombre, le point $B_{\nu 2}$ n'appartiendra pas aux courbes $C_0^{(\nu'+1)}$ et l'on aura, si x' est la multiplicité de $B_{\nu 1}$, $x_1 + x' = \nu + 1$. Une analyse minutieuse conduit à $x_1 = \nu' + 2$, $x_2 = \nu' + 1$, $x_3 = \nu' - 4$, $x_4 = 0$. Les courbes $C_0^{(\nu'+1)}$ passent simplement par les $2\nu' - 1$ points $B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots, B_{\nu 2\nu'-1}$. Elles ont en outre en commun un point quintuple, infiniment voisin de A_{ν_3} et à ce point quintuple fait suite une série de points infiniment voisins successifs se terminant par un point simple, uni parfait pour l'involution I_p.

Liège, le 22 mars 1948.

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4.