SURFACES ASSOCIÉES À UNE SUITE DE LAPLACE TERMINÉE *)

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liège-Belgique)

Soit (x) la surface de l'espace projectif P_3 associée à une suite de Laplace L périodique de l'espace de Klein (espace K). Si la périodicité de L est paire, sont établies les conditions d'existence d'une seconde surface $(\overline{x})$ associée à la même suite L dans le cas de périodicité $2n + 2$, où n est quelconque.

Dans des recherches faites depuis 1927, nous avons systématiquement étudié la géométrie projective différentielle des surfaces en utilisant la suite de Laplace associée à une surface dans l'espace linéaire à cinq dimensions. Notre point de départ est un théorème établi vers la même époque par Tzitzeica [1] et par M. Bompiani [2] suivant lequel les surfaces qui représentent sur l'hyperquadrique Q de Klein les tangentes aux asymptotiques des deux modes d'une surface sont transformées de Laplace l'une de l'autre. On définit ainsi, dans l'espace S_5, une suite de Laplace L que nous avons démontrée être autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q.

Une des questions que nous avons étudiées concerne les surfaces qui ont mêmes quadriques de Lie, surfaces dont l'étude avait été commencée par Demoulin. Pour une telle surface, la suite de Laplace L a la période six et cette suite est associée aux deux surfaces. Cette question suggère l'étude des surfaces associées à une suite de Laplace périodique. Nous avons démontré que cette suite a nécessairement une période paire. Si une surface (x) est associée à une suite L de période $2n + 2$, il existe une seconde surface $(\overline{x})$ associée à la même suite. Nous avons établi les conditions d'existence de la surface (x). Outre le cas $n = 2$, nous avons

*) Note présentée au Colloque sur la Géométrie différentielle globale (Bucarest, 30 juin — 4 juillet 1964).

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., 1965, TOME X, No 6, p. 687–690

étudié le cas $n = 3$. Dans cette note, nous apportons une contribution au cas où n est quelconque, supérieur à deux.

Nous renvoyons, pour le développement de la théorie, à une monographie où l'on trouvera la bibliographie antérieure à 1934 [3] et à un mémoire que nous venons de publier [4].

1. Considérons une surface (x) non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Si nous utilisons les coordonnées normales de Wilczynski, le point x satisfait à un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x_{uu} + 2bx_v + c'x = 0,$$
$$x_{vv} + 2ax_u + c''\alpha = 0.$$

Aux tangentes xx_u, xx_v aux asymptotiques u, v en un point x correspondent sur l'hyperquadrique Q de Klein dans S_5 les points

$$U = |\, x\, x_u \,|, \quad V = |\, x\, x_v \,|.$$

On a

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0,$$

de sorte que les points U, V se correspondent dans une transformation de Laplace et appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots, \tag{L}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. On a, par exemple,

$$U^1 = U_v - U(\log b)_v, \quad V^1 = V_u - V(\log a)_v.$$

Nous avons démontré que cette suite L est autopolaire par rapport à Q en ce sens que le point U^n a pour hyperplan polaire $V^{n-2}\, V^{n-1}\, V^n\, V^{n+1}\, V^{n+2}$ et le point V^n l'hyperplan $U^{n-2}\, U^{n-1}\, U^n\, U^{n+1}\, U^{n+2}$. Dans l'application de cette propriété, on doit remplacer U^{-i} par V^i et V^{-i} par U^i $(i \geqslant 0)$.

2. Nous allons supposer que la suite L est périodique. Nous avons établi que la période est nécessairement paire et nous l'indiquerons par $2n + 2$. Nous avons donc

$$U^{2n+2} = U, \quad V^{2n+2} = V$$

et nous avons indiqué les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite L de période $2n + 2$ existe.

Le point U^n est le pôle de l'hyperplan $V^{n-2}\, V^{n-1}\, V^n\, V^{n+1}\, V^{n+2}$ et par conséquent le point V^{n+1} coïncide avec le point U^n et celui-ci appartient donc à l'hyperquadrique Q. De même, le point V^n coïncide avec le point U^{n+1} et appartient à l'hyperquadrique Q.

La droite $U^n\, V^n$ est sa propre conjuguée par rapport à Q et appartient par conséquent à cette hyperquadrique. Elle représente un faisceau de rayons de centre $\bar{x}$ et de plan $\bar{\xi}$.

Au point x correspond le point $\bar{x}$ qui décrit une surface $(\bar{x})$ et aux courbes u, v de (x) correspondent des courbes u, v sur $(\bar{x})$.

Le transformé de Laplace de U^n dans le sens des v est le point V^n et le transformé de celui-ci dans le sens des u est U^n, par conséquent le point U^n représente la tangente $\overline{x}\overline{x}_v$ et le point V^n la tangente $\overline{x}\overline{x}_u$ au point $\overline{x}$ de la surface $(\overline{x})$.

Considérons la tangente $\overline{x}\overline{x}_v$ à la courbe v tracée sur $(\overline{x})$; elle est représentée par le point U^n et le plan osculateur à cette courbe v par un plan appartenant à Q et coupant la surface (U^n) suivant une courbe tangente à $U^n V^n$. Par suite, ce plan contient cette droite et le plan osculateur à la courbe v en $\overline{x}$ coïncide avec le plan ξ. On démontre de même que le plan osculateur à une courbe u en $\overline{x}$ coïncide avec le plan ξ. Il en résulte que les courbes u, v sont les asymptotiques de la surface $(\overline{x})$

Si une surface (x) est associée à une suite de Laplace périodique, il existe une seconde surface $(\overline{x})$ associée à la même suite et les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.

3. Attachons au point x de la surface (x) le tétraèdre de Cartan dont les sommets sont les points

$$x,\ m = x(\log a)_u - 2x_u\, n = x(\log b)_v - 2x_v,$$

$$y = [8.ab - (\log a)_u (\log b)_v]\, x_v\, 2x_u (\log b)_v + 2x_v (\log a)_u - 4x_{uv},$$

et au point $\overline{x}$ correspondant sur $(\overline{x})$ le tétraèdre de Cartan dont nous désignerons les sommets par $\overline{x}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{y}$ définis d'une manière analogue. Rappelons que les sommets du tétraèdre de Cartan attaché en un point d'une surface sont les points d'intersection des directrices de Wilczynski avec la quadrique de Lie.

Considérons l'homographie

$$\theta = \begin{pmatrix} x & m & n & y \\ \overline{x} & \overline{m} & \overline{n} & \overline{y} \end{pmatrix}$$

qui dépend de u, v. Il lui correspond dans S_5 une homographie Θ transformant Q en soi.

Au point V^n qui représente la droite $\overline{x}\overline{m}$, Θ fait correspondre le point U qui représente la droite xm, et au point U^n le point V.

A une suite de Laplace, une homographie fait correspondre une suite de Laplace, donc à la suite L, Θ fait correspondre la suite L, les points étant pris dans un autre ordre. Précisément, puisque au point V^n correspond le point U, au transformé de Laplace de V^n dans le sens des v, c'est-à-dire au point V^{n-1}, Θ fait correspondre le transformé de Laplace de U dans le sens des v, c'est-à-dire le point U^1. Et ainsi de suite.

Il existe une homographie Θ qui dépend de u, v, qui fait correspondre aux points

$$U^n, \ldots, U^1,\ U,\ V,\ V^1, \ldots, V^n$$

respectivement les points

$$V,\ V^1, \ldots, V^n,\ U^n, \ldots, U^1,\ U.$$

4. Les arêtes xy et mn du tétraèdre de Cartan sont les directrices de Wilczynski de la surface (x) et de même, les droites $\overline{x}\overline{y}$ et $\overline{m}\overline{n}$ sont les directrices de Wilczynski de la surface $(\overline{x})$.

Les droites xy et mn sont représentées sur Q par les points d'intersection W^1, W^2 de la droite $U^1 V^1$ avec cette hyperquadrique. De même, les droites $\overline{x}\overline{y}$ et $\overline{m}\overline{n}$ sont représentées sur Q par les points $\overline{W}^1$, $\overline{W}^2$ de la droite $\overline{U}^{n-1}\overline{V}^{n-1}$. Aux droites $\overline{x}\overline{y}$ et $\overline{m}\overline{n}$, θ fait correspondre les droites xy et mn, donc aux points $\overline{W}^1$, $\overline{W}^2$, Θ fait correspondre les droites W^1, W^2.

Les directrices de Wilczynski des surfaces (x) *et* $(\overline{x})$ *se correspondent dans l'homographie* Θ.

Université de Liège (Belgique)

BIBLIOGRAPHIE

1. Tzitzeica, *Sur un théorème de M. Darboux*, C.R., 1910, **151**, 971–974 ; *Œuvres*, Bucarest, 1941, 193 – 196. Voir aussi Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Paris, 1924.
2. Bompiani, *Sull'equazione di Laplace.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912 **34**, 383–407.
3. L. Godeaux, *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* Actualités scient., Hermann, Paris, 1934.
4. — *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé.* Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1964.