REMARQUES SUR LES SURFACES MULTIPLES AYANT UN NOMBRE FINI DE POINTS DE DIRAMATION;

Par M. Lucien GODEAUX.

Considérons une surface algébrique multiple Φ, n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation, c'est-à-dire une surface image d'une involution I_p, d'ordre p, appartenant à une surface algébrique F et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Supposons l'involution I_p cyclique et d'ordre premier p. Dans un travail récent (¹), nous avons étudié les points de diramation de la surface Φ en lesquels celle-ci a des cônes tangents décomposés en deux cônes irréductibles. D'une manière précise, nous avons établi que si en un point de diramation A', la surface Φ a un point multiple d'ordre n_1+n_2, le cône tangent étant formé de deux cônes irréductibles, d'ordres n_1, n_2, nécessairement rationnels, ces deux cônes n'ont en commun qu'une génératrice et la surface Φ possède, soit une suite de k points doubles biplanaires infiniment voisins successifs de A', le dernier étant ordinaire, si

$$p=(2k+1)n_1n_2+n_1+n_2,$$

soit une suite de k points doubles biplanaires suivis d'un point double conique, infiniment voisins successifs de A' si

$$p=2(k+1)n_1n_2+n_1+n_2.$$

Nous voudrions revenir sur ce travail pour indiquer des démonstrations nouvelles de certains points établis et pour obtenir quelques résultats nouveaux.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1938, p. 193-222. *Voir* aussi une Note dans les *C. R. de l'Acad. des Sciences*, séance du 29 novembre 1937.

1. Soit F une surface algébrique possédant une involution cyclique I_p d'ordre premier p. Nous pouvons prendre, comme modèle projectif de cette surface, une surface normale F de S_r, sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une homographie H, de période p, de l'espace S_r ([1]). On peut, de plus, supposer que l'homographie H possède exactement p axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ dont nous désignerons les dimensions respectives par $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Nous désignerons par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ les systèmes d'hyperplans de S_r passant respectivement par $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$; par $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$; ...; par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Soit $|C|$ le système des sections hyperplanes de F. Les hyperplans de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ découpent sur F des systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ contenus dans $|C|$ et appartenant à l'involution I_p.

Nous supposerons que l'involution I_p ne possède qu'un nombre fini de points unis. On peut alors supposer sans restriction que ces points appartiennent à l'axe σ_1, les autres axes de l'homographie H ne rencontrant pas F. Il en résulte que le système $|C_1|$ est dépourvu de points-base, les systèmes $|C_2|, |C_3|, \ldots, |C_p|$ ayant comme points-base les points unis de l'involution.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions, la surface F se transforme en une surface normale Φ, image de l'involution I_p, sur laquelle aux points unis de I_p correspondent des points isolés : les points de diramation de la surface.

Nous désignerons par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_p|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur Φ aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$. Les courbes Γ_1 sont donc les sections hyperplanes de Φ ; si π est le genre de ces courbes et n l'ordre de Φ, les courbes C sont d'ordre pn et de genre $p(\pi - 1) + 1$.

2. Soient A un point uni de l'involution I_p, simple pour la surface F, et A′ le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Le plan α, tangent à la surface F en A, ne rencontre σ_1 qu'au seul point A et s'appuie en un point sur chacun des axes σ_2, σ_3.

Désignons par C'_1 les courbes C_1 passant par A. Pour que le

([1]) *Voir* par exemple notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, n° 270, Paris, Hermann, 1935).

cône tangent en A' à la surface Φ se décompose en deux cônes irréductibles, il faut que les courbes C'_1 aient en commun deux suites de points : $P_1, P_2, \ldots, P_h$ et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, infiniment voisins successifs de A. Ces points sont unis non parfaits pour l'involution I_p, sauf les deux derniers, P_h, Q_k, qui sont unis parfaits pour cette involution. Les droites AP_1, AQ_1, tangentes à la surface F, s'appuient la première sur σ_2 par exemple, la seconde sur σ_3. Si n_1 est la multiplicité de P_h pour les courbes C'_1, n_2 celle de Q_k, le point A' est multiple d'ordre $n_1 + n_2$ pour Φ et le cône tangent à cette surface en ce point se compose d'un cône d'ordre n_1 et d'un cône d'ordre n_2, ayant une seule génératrice en commun. On a d'ailleurs

$$n_1 + n_2 < p.$$

Projetons la surface F du point A sur un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A et soit F' la surface obtenue. La surface F' est transformée en elle-même par H et cette homographie détermine sur cette surface une involution I'_p projection de I_p. L'involution I'_p possède comme points unis les points A_2 de σ_2, A_3 de σ_3, appartenant au plan α et projections respectivement des points P_1, Q_1.

Soient ρ la multiplicité du point A pour les courbes C'_1, ρ_{11}, $\rho_{12}, \ldots, \rho_{1h}$, les multiplicités des points $P_1, P_2, \ldots, P_h$ et $\rho_{21}, \rho_{22}, \ldots, \rho_{2k}$, celles des points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. Aux courbes C'_1 correspondent sur la surface F' des courbes que nous désignerons encore par C'_1, d'ordre $pn - \rho$, ayant les multiplicités ρ_{11} en A_2 et ρ_{21} en A_3. Les courbes C'_1 de F' ont en commun une suite de $h - 1$ points $P'_2, \ldots, P'_h$, infiniment voisins successifs de A_2 et une suite de $k - 1$ points $Q'_2, Q'_3, \ldots, Q'_k$, infiniment voisins successifs de A_3.

Soient C_3 les courbes découpées sur F par les hyperplans de Σ_3. Ces courbes passent simplement par A et par les points P_1, $P_2, \ldots, P_h$. Sur la surface F', il correspond aux courbes C_3 des courbes passant simplement par les points $A_2, P'_2, P'_3, \ldots, P'_h$.

Le plan tangent α'_2 à F' en A_2 est uni pour H et passe par A_3. S'il rencontre σ_3 suivant une droite, le point A_2 est uni parfait pour I'_p et l'on a $h = 1$. Supposons $h > 1$; le plan α'_2 s'appuie en un point A'_2 sur l'un des axes $\sigma_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_p$ de H, par exemple sur σ_4.

Le point P'_2 appartient nécessairement à la droite $A_2A'_2$, sans quoi il appartiendrait à la droite A_2A_3 et les courbes C_2, sur la surface F', toucheraient cette droite en A_2; le point A serait alors au moins double pour les courbes C_3 de la surface F. On peut faire le même raisonnement au sujet du point Q'_2 et l'on voit donc que si $h > 1$, $k > 1$, les courbes C'_1 de F' ne touchent pas A_2A_3 en A_2 ou en A_3. On en conclut

$$\rho = \rho_{11} + \rho_{21}.$$

3. Projetons la surface F' de A_2 sur un hyperplan de Σ_2 ne passant pas par A_2 et soit F'' la surface obtenue. L'homographie H transforme F'' en elle-même et détermine sur cette surface une involution I''_p projection de I'_p. L'involution I''_p possède comme points unis A'_2 et A_3. Aux courbes C'_1 de F' correspondent sur F'' des courbes que nous désignerons toujours par C'_1, passant par A'_2 avec la multiplicité ρ_{12} et par une suite de points $P''_3, P''_4, \ldots, P''_h$ infiniment voisins successifs de A'_2. Ces points appartiennent également aux projections des courbes C_3 de la surface F' et sont simples pour ces courbes. Il en résulte que le point P''_3 ne peut appartenir à la droite A'_2A_3 et que, par suite, $\rho_{12} = \rho_{11}$.

On établira de même que les nombres $\rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_{1h} = n_1$ sont tous égaux et que l'on a également

$$\rho_{21} = \rho_{22} = \ldots = \rho_{2k} = n_2.$$

Dans le travail cité au début, nous avons établi que le nombre de points d'intersection d'une courbe C'_1 et d'une courbe C_3 confondus en A était égal à p; nous aurons donc

$$n_1 + n_2 + hn_1 = p$$

et de même

$$n_1 + n_2 + kn_2 = p.$$

Nous sommes donc conduit à poser

$$h = \lambda n_2, \qquad k = \lambda n_1, \qquad p = \lambda n_1 n_2 + n_1 + n_2,$$

λ étant un entier positif.

4. Désignons par C''_1 les courbes C'_1 assujetties à toucher en A une droite distincte de AA_2, AA_3. Les courbes C''_1 ont en A une multiplicité supérieure à $n_1 + n_2$ et au plus égale à p. Si cette

multiplicité est égale à p, nous avons prouvé que $p = 3$; laissons ce cas, complètement élucidé, de côté et supposons donc $p > 3$.

Aux courbes C'_1 correspondent sur la surface Φ les sections Γ'_1 de cette surface par les hyperplans passant par le point de diramation A'. Aux courbes C''_1 correspondent les sections Γ''_1 de Φ par les hyperplans passant par la génératrice commune aux deux cônes tangents en A' à la surface Φ, génératrice qui est simple pour chacun de ces deux cônes.

Projetons la surface Φ du point A' sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par A' et soit Φ_1 la surface obtenue. Au domaine du point A' de Φ correspond sur Φ_1 l'ensemble de deux courbes rationnelles γ_1, γ_2, d'ordres n_1, n_2, se rencontrant en un point A'_1, simple pour ces deux courbes. Les points de γ_1 correspondent aux groupes de I_p formés par les points de F infiniment voisins du point uni parfait P_h et les points de γ_2 correspondent aux points infiniment voisins du point Q_k.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_1 sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_1.

La droite $A'A'_1$ étant double pour le cône projetant de A' la courbe $\gamma_1 + \gamma_2$, cône tangent à Φ en ce point, le point A'_1 est au plus double pour la surface Φ_1. Dans tous les cas, les courbes C''_1 passeront par les points $P_1, P_2, \ldots, P_h$ et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$; elles auront la multiplicité $n_1 - 1$ en P_h et $n_2 - 1$ en Q_k.

Si le point A'_1 est simple pour Φ_1, les courbes C''_1 auront en commun une suite de points infiniment voisins successifs dont le premier appartiendra au domaine de l'un des points $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$ et dont le dernier sera simple pour les courbes C''_1 et uni parfait pour l'involution I_p.

Si le point A'_1 est double conique, il existera une suite analogue à la précédente, mais dont le dernier point sera double pour les courbes C''_1.

Si le point A'_1 est biplanaire, il y aura deux suites analogues de points communs aux courbes C''_1, se terminant par des points simples pour ces courbes et unis parfaits pour l'involution I_p.

5. Plaçons-nous dans le cas où le point A'_1 est double biplanaire pour Φ_1 et appelons C'''_1 les courbes C''_1 assujetties à toucher en A une droite distincte de AA_2, AA_3. Les courbes C'''_1 ont en A une

multiplicité supérieure à celle des courbes C''_1 et au plus égale à p. Si cette multiplicité est égale à p, le point A'_1 est biplanaire ordinaire pour Φ_1. Supposons qu'elle soit inférieure à p.

Projetons la surface Φ_1 du point A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_2 la surface obtenue. Aux courbes γ_1, γ_2 de Φ_1 correspondent sur Φ_2 des courbes γ'_1, γ'_2 d'ordres $n_1 - 1$, $n_2 - 1$. Au domaine du point A'_1 correspondra sur Φ_2 l'ensemble de deux droites γ_{11}, γ_{21} se coupant en un point A'_2. Ce point peut être simple ou double et l'on peut reprendre, pour les courbes C'''_1, le raisonnement fait pour les courbes C''_1.

Observons que si le point A'_1 était double uniplanaire pour la surface Φ_1, comme le système $|C'''_1|$ est unique, ce point A'_1 serait équivalent à une suite de points doubles biplanaires et nous serions ramené au cas précédent. En d'autres termes, il ne peut exister, dans le domaine du premier ordre de A'_1, deux ou trois points doubles distincts.

En continuant le raisonnement précédent, on voit que l'on doit arriver finalement à un système linéaire $|C^*_1|$ possédant les particularités suivantes :

1° Les courbes C^*_1 ont en A la multiplicité p et des tangentes variables, *ou*

2° Les courbes C^*_1 ont en A une multiplicité α inférieure à p et supérieure à $n_1 + n_2$. Ces courbes ont la multiplicité $n_1 - 1$ en P_h, $n_2 - 1$ en Q_k; elles passent par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$ et par une suite de points $R_1, R_2, \ldots, R_j$ infiniment voisins successifs dont le premier R_1 appartient au domaine du point P_i $(0 < i < h)$, est distinct de P_{i+1} et dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p et simple ou double pour les courbes C^*_1.

La surface Φ_1 possède en A'_1 un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\eta - 1$ points doubles biplanaires. Le dernier de ces points est ordinaire si le point R_j est simple pour les courbes C^*_1; les points biplanaires sont suivis d'un point double conique si R_j est double pour les courbes C^*_1.

Nous allons examiner successivement ces deux hypothèses.

6. Commençons par supposer que la surface Φ_1 ait en A'_1 une

suite de η points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, c'est-à-dire que le point R_j soit simple pour les courbes C_1^*. Supposons de plus $\alpha < p$.

Si l'on applique la remarque faite plus haut pour déterminer la multiplicité pour les courbes C_1' des points $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$, on voit que :

1° Les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ sont multiples d'ordre $n_2 - 1$ pour les courbes C_1^*.

2° Les points $P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P_h$ sont multiples d'ordre $n_1 - 1$ pour ces courbes.

Les courbes C_2, découpées sur F par les hyperplans de Σ_2, passent simplement par les points $A, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ et doivent rencontrer les courbes C_1^* en un nombre de points confondus en A, multiple de p. On a donc

$$\alpha + \lambda n_1 (n_2 - 1) = \mu p,$$

μ étant un entier positif. On en déduit

$$\alpha = (\mu - 1)p + (\lambda + 1)n_1 + n_2.$$

On doit avoir $\alpha < p$, donc

$$\mu = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha = (\lambda + 1)n_1 + n_2.$$

Si $j > 1$, le point P_1 et de même les points $P_2, P_3, \ldots, P_{i-1}$ ont la multiplicité

$$\alpha_1 = \alpha - (n_2 - 1) = (\lambda + 1)n_1 + 1.$$

Soient α_i la multiplicité du point P_i pour les courbes C_1^*, $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_j' = 1$ celles des points $R_1, R_2, \ldots, R_j$.

Les courbes C_3 rencontrent les courbes C_1^* en un nombre de points confondus en A, multiple de p ; on doit donc avoir

$$(1) \qquad (\lambda n_1 + 2)i + \alpha_i = (\mu' - 1)p + \lambda n_2 + n_1 + 1,$$

μ' étant un entier positif.

Aux courbes C_1^* correspondent, sur la surface Φ_1, les sections Γ_1^* de celle-ci par les hyperplans passant par les η points doubles biplanaires situés en A_1' et par le point simple qui leur fait suite. Le système $|\Gamma_1^*|$ a donc le degré $n - n_1 - n_2 - 2\eta - 1$ et, par suite, le point A absorbe $p(n_1 + n_2 + 2\eta + 1)$ points d'intersection de deux courbes C_1^*. On en déduit

$$(2) \qquad (\lambda + 2)(\lambda n_1 + 2) n_1 i + \alpha_i^2 + \Sigma \alpha'^2 = (2\eta + 1)p + 2\lambda n_1 n_2 + \lambda(n_1 - n_2) + (n_1 + 1)^2.$$

Les courbes Γ_1^* sont de genre $\pi - (n_1 + n_2 - 1) - \eta$. Si l'on applique la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe Γ_1^* et la courbe C_1^* homologue, on obtient, en tenant compte de (1) et (2), la relation

$$(3) \qquad \alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_j = \lambda n_1 + 1 + p(1 - \mu').$$

Le premier membre doit être positif, donc on a

$$\mu' = 1.$$

7. Transformons birationnellement la surface F en une surface F_1 sur laquelle au point P_{i-1} corresponde un point propre P'_{i-1}. A l'involution I_p correspond sur F_1 une involution I'_p possédant le point uni P'_{i-1}. A ce point est infiniment voisin un point uni P'_i, homologue de P_i. Transformons encore birationnellement F_1 en une surface F_2 de telle sorte qu'au point P'_{i-1} corresponde, sur F_2, une courbe exceptionnelle s. Soit P''_i le transformé du point P'_i sur la surface F_2; il appartient à la courbe s. Aux courbes C_1^* correspondent, sur la surface F_2, des courbes ayant la multiplicité α_i en P''_i; ces courbes possèdent une suite de $h - 1$ points infiniment voisins successifs de P''_i, multiples d'ordre $n_1 - 1$, transformés des points $P_{i+1}, \ldots, P_h$, et une suite de j points infiniment voisins successifs, multiples d'ordres $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_j$, dont les l premiers appartiennent à la courbe s.

Si $l > 1$, on a

$$\alpha_1 = \alpha_i + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_l, \qquad \alpha_i = \alpha'_1 + n_1 - 1.$$

En combinant ces relations avec la relation (3), on trouve

$$l = j, \qquad \alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_j + 1, \qquad \alpha_i = n_1.$$

Si $l = 1$, on a

$$\alpha_1 = \alpha_i + \alpha'_1,$$

d'où, par (3),

$$\alpha_i = n_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_j.$$

Si nous transformons la surface F_2, birationnellement, en une surface F_3 telle qu'au point P''_i corresponde une courbe exceptionnelle s' et si R'_1 est le transformé de R_1 sur s', les transformés des points R_2, R_3, ..., R_j sont nécessairement sur la courbe s'. On a donc

$$\alpha_i = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_j + n_1 - 1,$$

d'où

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_j = 1, \qquad \alpha_i = (\lambda + 1) n_1.$$

Deux cas peuvent donc se présenter :

1° $\alpha_i = n_1$. Les formules (1) et (2) donnent

$$(\lambda n_1 + 2) i = \lambda n_2 + 1, \qquad \lambda = 2\eta + 1.$$

2° $\alpha_i = (\lambda + 1) n_1$. Les relations (1) et (2) donnent

$$(\lambda n_1 + 2) i = \lambda (n_2 - n_1) + 1, \qquad \lambda = 2\eta + 1.$$

Ces résultats sont conformes à ceux que nous avions établi dans notre Mémoire cité. On remarquera que λ est impair ($\eta = k$); de plus, i devant être entier positif, la première relation donne, dans chaque cas, une liaison entre λ, n_1 et n_2. On a d'ailleurs $n_2 > n_1$.

8. Le cas où la surface Φ_1 possède en A'_1 un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\eta - 1$ points doubles biplanaires suivis d'un point double conique, se traite de la même manière. Conservons les mêmes notations, mais en observant que l'on a actuellement $\alpha'_j = 2$.

La relation (1) subsiste, mais le point A absorbe

$$p(n_1 + n_2 + 2\eta + 2)$$

des points d'intersection de deux courbes C^*_1 et la relation (2) doit être remplacée par

$$(2') \qquad \begin{aligned} &(\lambda + 2)(\lambda n_1 + 2) n_1 i + \alpha_i^2 + \Sigma \alpha'^2 \\ &= (2\eta + 2) p + 2\lambda n_1 n_2 + \lambda (n_1 - n_2) + (n_1 + 1)^2. \end{aligned}$$

Les courbes Γ^*_1 sont actuellement de genre

$$\pi - (n_1 + n_2 - 1) - \eta - 1$$

et l'application de la formule de Zeuthen donne

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_j = \lambda n_1 + p(1 - \mu'),$$

d'où, comme tantôt, $\mu' = 1$.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on est conduit à considérer deux cas :

1°

$$\alpha_1 = \alpha_i + \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_l \quad (1 < l \leqq j), \qquad \alpha_i = \alpha'_1 + n_1 - 1.$$

On a

$$l = j, \qquad \alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_j = 2, \qquad \alpha_i = n_1 + 1, \qquad 2j = \lambda n_1.$$

Les relations (1) et (2′) donnent

$$(\lambda n_1 + 2) i = \lambda n_2, \qquad \lambda = 2\eta + 2.$$

2°

$$\alpha_1 = \alpha_i + \alpha'_1, \qquad \alpha_i = n_1 + 1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_j.$$

On a nécessairement

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_j = 2, \qquad \alpha_i = (\lambda + 1) n_1 - 1, \qquad 2j = \lambda n_1.$$

Des relations (1), (2′), on déduit

$$(\lambda n_1 + 2) i = \lambda (n_2 - n_1) + 2, \qquad \lambda = 2\eta + 2.$$

Ces conclusions sont également conformes aux résultats de notre Mémoire; λ est pair ($\eta = k$) et le fait que i doit être entier positif donne une relation entre n_1, n_2 et λ. On a encore

$$n_2 > n_1.$$

9. Il nous reste à examiner le cas où les courbes C_1^* ont en A la multiplicité $\alpha = p$. Il existe un seul système linéaire formé de courbes C_1 ayant la multiplicité p en A, les tangentes à ces courbes en A étant variables. Le système $|C_1^*|$ doit coïncider avec ce système et l'on a

$$n_1 = n_2 = 1.$$

La surface Φ possède en A′ un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p - 3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire [1].

---

[1] Nous avons étudié ce cas dans nos *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, p. 1131-1150).

10. Comme application de ce qui précède, recherchons dans quelles conditions le point A′ peut être triple pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant formé d'un plan et d'un cône quadratique irréductible. Supposons donc

$$n_1 = 1, \qquad n_2 = 2.$$

Plaçons-nous dans le premier cas du paragraphe 7. Nous devons avoir

$$i(\lambda + 2) = 2\lambda + 1,$$

d'où

$$\lambda = 1, \qquad i = 1 \qquad \text{et} \qquad p = 5.$$

Le point A'_1 est simple pour la surface Φ_1.

Dans le second cas, nous devons avoir

$$i(\lambda + 2) = \lambda + 1,$$

ce qui est impossible.

Passons au premier cas du paragraphe 9. Nous devons avoir

$$i(\lambda + 2) = 2\lambda,$$

ce qui implique $i = 1$, $\lambda = 2$, $\eta = 0$. On a $p = 7$ et le point A'_1 est double conique pour la surface Φ_1.

Dans le dernier cas, on a

$$i(\lambda + 2) = \lambda + 2,$$

d'où $i = 1$, λ étant quelconque (mais pair). On a $p = 2\lambda + 3$. Le point A′ est triple pour la surface Φ, le cône tangent en ce point étant décomposé en un plan et un cône du second ordre ayant une seule de ses génératrices dans le plan. A ce point sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{4}(p - 3)$ points doubles biplanaires, sauf le dernier qui est double conique.

Liége, le 26 mars 1940.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. LXIV, août-septembre-octobre 1940.)