EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, Nos 8-9-10, 1936.

Sur une variété rationnelle à trois dimensions,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Dans cette courte note, nous considérons une variété rationnelle à trois dimensions intersection partielle de $n-3$ hyperquadriques d'un espace à n dimensions, ayant en outre en commun un espace linéaire à $n-4$ dimensions.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_n à n dimensions, un espace linéaire σ_{n-4}, à $n-4$ dimensions, d'équations

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

et $n-3$ hyperquadriques V_{n-1}^2 linéairement indépendantes contenant σ_{n-4}. Les équations de ces hyperquadriques peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{c} x_4\,\alpha_{i4}(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_5\,\alpha_{i5} + \cdots + x_n\alpha_{in} \\ + \alpha_i(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, n-3) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

les α_{ik} étant des formes linéaires et les α_i des formes quadratiques en x_0, x_1, x_2, x_3.

Les $n-3$ hyperquadriques (1) ont en commun, en dehors de σ_{n-4}, une variété algébrique à trois dimensions, Ω, rationnelle, dont on obtient la représentation sur un espace à trois dimensions par projection à partir de σ_{n-4}.

Désignons par Σ l'espace à trois dimensions d'équations

$$x_4 = x_5 = \cdots = x_n = 0.$$

La projection de la section de Ω par l'hyperplan

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0$$

à partir de σ_{n-4} sur Σ est la surface Φ d'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{14} & \alpha_{15} & \ldots & \alpha_{1n} & \alpha_1 \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \ldots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-3,4} & \ldots & \ldots & \alpha_{n-3,n} & \alpha_{n-3} \\ \xi_4 & \xi_5 & \ldots & \xi_n & \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

La surface Φ est d'ordre $n-2$; elle engendre un système linéaire $|\Phi|$, de dimension n, ayant pour base la courbe Δ d'équations

$$\| \alpha_{i4} \quad \alpha_{i5} \dots \alpha_{in} \quad \alpha_i \| = 0,$$

d'ordre $\frac{1}{2} n (n-3)$

Deux surfaces Φ ont en commun, en dehors de la courbe Δ, une courbe Γ d'ordre $\frac{1}{2}(n^2 - 5n + 8)$.

2. La variété Ω a en commun avec l'espace σ_{n-4} une surface F_0. Les hyperplans passant par σ_{n-4} coupent Ω suivant F_0 et suivant des surfaces F_1, projetées de σ_{n-4} suivant les plans

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

de l'espace Σ. A la surface F_0 correspond donc dans Σ la surface Φ_0 d'équation

$$| \alpha_{i4} \quad \alpha_{i5} \dots \alpha_{in} | = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n-3)$$

d'ordre $n-3$, passant par Δ.

L'ordre d'une surface F_1 est égal au nombre de points de rencontre du plan correspondant et d'une courbe Γ, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(n^2 - 5n + 8)$.

Soit $0, 0, 0, 0, y_4, \dots, y_n$ un point de Ω appartenant à l'espace σ_{n-4}. L'espace tangent à cette variété en ce point a pour équations

$$y_4 \alpha_{i4}(x_0, x_1, x_2, x_3) + y_5 \alpha_{i5} + \dots + y_n \alpha_{in} = 0, \qquad (3)$$
$$(i = 1, 2, \dots, n-3).$$

Écrivons ces équations sous la forme

$$x_0 \beta_{i0}(y_4, y_5, \dots, y_n) + x_1 \beta_{i1} + x_2 \beta_{i2} + x_3 \beta_{i3} = 0. \qquad (4)$$

L'élimination des y entre les équations (3) donne l'équation de la surface Φ_0 homologue, dans Σ, de la surface F_0. L'élimination des x entre les équations (3) ou (4) fournit les équations de la surface F_0, sous la forme

$$\| \beta_{i0} \quad \beta_{i1} \quad \beta_{i2} \quad \beta_{i3} \| = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n-3).$$

La surface F_0 est d'ordre $\frac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)$ [1], et par

[1] Sur les surfaces annulant certaines matrices de formes linéaires. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 963-973.)

conséquent la variété Ω est d'ordre

$$\frac{1}{2}(n^2-5n+8)+\frac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)=\frac{1}{6}(n^3-9n^2+32n-36).$$

Tel est également le degré du système linéaire $|\Phi|$, et par conséquent les courbes Γ s'appuient en $\frac{1}{3}(n^3-6n^2+11n-6)$ points sur la courbe Δ.

Liége, le 22 octobre 1936.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.