
GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, Membre de l'Académie.

(*Troisième note*)

Dans cette troisième note [1], nous considérons le cas où le cône tangent à la surface Φ image de l'involution cyclique d'ordre p^2 considérée sur la surface F, possède au point de diramation A'' un cône tangent formé de plus de deux cônes rationnels.

Le cône tangent à la surface Φ en A'' est nécessairement formé de deux parties γ_1, γ_2, cônes partiels ayant en commun une droite. Chacun de ces cônes peut dégénérer en plusieurs cônes rationnels. Nous indiquons quelques propriétés générales et nous considérons plus particulièrement le cas où un seul des cônes γ_1, γ_2 dégénère. Nous montrons que si le cône γ_1 est irréductible et d'ordre au plus égal à $\frac{1}{2}(p-1)$, la surface Φ possède un point double biplanaire infiniment voisin de A''.

Nous traitons ensuite complètement un cas particulier, où le cône γ_1 est irréductible et du second ordre, le cône γ_2

---

[1] Les deux premières notes ont paru dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1940, pp. 28-43, 100-111.

se décomposant en deux cônes. Nous établirons le théorème suivant :

Si une involution cyclique d'ordre p^2, *où* $p=2\eta+1$ *est premier, appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, possède un point uni dans le domaine duquel l'involution détermine une involution d'ordre* p, *et si le cône tangent à une surface image de l'involution au point de diramation correspondant se scinde en trois cônes irréductibles dont l'un, du second ordre, correspond à un des points unis de l'involution infiniment voisin du point uni considéré, les deux autres cônes sont un cône d'ordre* $\eta-1$, *rationnel, rencontrant le cône quadratique suivant une droite, et un plan rencontrant le cône d'ordre* $\eta-1$ *suivant une droite. Au point de diramation considéré, sur la droite commune aux cônes d'ordre deux et d'ordre* $\eta-1$, *est infiniment voisin un point double biplanaire suivi de* $\frac{1}{2}(\eta-2)$ *points doubles biplanaires infiniment voisins successifs si* η *est pair, de* $\frac{1}{2}(\eta-3)$ *points doubles biplanaires et d'un point double conique infiniment voisins successifs si* η *est impair.*

19. Le plan tangent α à la surface F au point uni A s'appuie en un point A_1 sur l'axe S_{21} et en un point A_p sur l'axe S_{2p} de l'homographie T. Projetons la surface F du point A sur un hyperplan de Σ_{11} ne passant pas par A. Nous obtenons une surface F_1, d'ordre np^2-1, transformée en elle-même par T. Sur la surface F_1, T engendre une involution d'ordre p^2 correspondant à l'involution I_q; on peut sans inconvénient continuer à désigner cette involution par le même symbole I_q. Cette involution possède A_1 et A_p comme points unis et ces points sont d'ailleurs simples pour la surface F_1. Si le point A_1 est uni parfait pour l'involution I_q, le plan tangent à F_1 en A_1 coupe l'espace S_{2p} suivant une droite. Dans le cas opposé, ce plan coupe S_{2p} au point A_p et un des axes de l'homographie T distinct de

S_{21}, S_{2p} suivant un point A_2. Plaçons-nous dans ce dernier cas et projetons la surface F_1 de A_1 sur un hyperplan de Σ_{21} ne passant pas par A_1; nous obtenons une surface F_2 transformée en elle-même par T. Sur cette surface, cette homographie engendre une involution d'ordre p^2 possédant les points unis A_2, A_p. Nous pouvons reprendre, pour la surface F_2, le même raisonnement que pour la surface F_1, et ainsi de suite.

Supposons que par ce procédé, nous soyons arrivé à une suite de surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \ldots$, transformées en elles-mêmes par l'homographie T. Chacune de ces surfaces est obtenue en projetant la précédente d'un point simple de celle-ci. Nous désignerons ces points par A_1, A_2, $\ldots$, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, $\ldots$, le point A_k appartenant à la surface F_k. Chacun de ces points est uni et sera supposé uni non parfait pour l'involution engendrée par T sur la surface qui le contient. Le plan tangent en A_{k-1} à la surface F_{k-1} passe par les points A_k, A_p, ce dernier appartenant à l'espace S_{2p} et le premier appartenant à un autre axe de l'homographie T. La surface F_k contient évidemment la droite A_kA_p.

Considérons maintenant, sur la surface F, une courbe D appartenant à l'involution I_q et supposons que cette courbe ait la multiplicité ρ en A et ρ_1 au moins de ses tangentes en ce point confondues avec la droite $a_1 = AA_q$. Supposons en outre que la projection de la courbe D du point A sur la surface F_1 possède la multiplicité ρ_1 en A_1, que la projection de la courbe D de la droite AA_1 sur la surface F_2 possède la multiplicité ρ_2 en A_2 et ainsi de suite. Les projections de la courbe D sur les différentes surfaces F_1, F_2, $\ldots$, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, $\ldots$, ont par hypothèse les multiplicités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k, \rho_{k+1}, \ldots$ en A_1, A_2 $\ldots$, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, $\ldots$. Nous désignerons toujours par D l'homologue sur une des surfaces F_k de la courbe D de la surface F.

La suite des nombres $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ est non croissante. Supposons que l'on ait $\rho_k < \rho_{k-1}$, les tangentes à la courbe

D de F_{k-1} en A_{k-1} étant toutes confondues avec $A_{k-1}A_k$. La courbe D tracée sur la surface F_k a la multiplicité ρ_k en A_k et doit rencontrer la droite A_kA_p en $\rho_{k-1} > \rho_k$ points confondus en A_k; elle est donc certainement tangente en ce point à la droite A_kA_p. La courbe D de F_k peut d'ailleurs ne plus être tangente en A_k à la droite A_kA_{k+1}, c'est-à-dire que l'on peut avoir $\rho_{k+1}=0$.

Supposons que l'on soit assuré que ρ_{k+1} ne soit pas nul et retournons à la surface F. Aux points A_1, A_2, ... correspondent des points infiniment voisins successifs de A respectivement multiples d'ordre ρ_1, ρ_2, ... pour la courbe D. Désignons encore ces points par A_1, A_2, ... De ce qui précède, on conclut que si l'on a $\rho_{k-2}=\rho_{k-1}$, $\rho_{k-1} > \rho_k$ et $\rho_{k+1} > 0$, il existe deux points distincts, dont l'un est A_{k+1}, infiniment voisins de A_k, appartenant à la courbe D. De plus, on a évidemment $\rho_{k+1} < \rho_k$ et la multiplicité pour la courbe D du second point infiniment voisin de A_k est au plus égale à $\rho_{k-1}-\rho_k$.

20. Supposons que l'on rapporte l'espace contenant la surface F à un système de coordonnées projectives dont les sommets du système de référence appartiennent tous aux axes de l'homographie T et qu'en particulier A, A_1, A_p soient parmi ces sommets. Cela revient à attacher à chaque axe de l'homographie une racine d'ordre p^2 de l'unité. Si ε est une racine primitive d'ordre p^2 de l'unité, supposons qu'aux axes S_{11}, S_{21}, S_{2p} soient respectivement attachées les racines 1, ε, ε^τ, où τ est un entier supérieur à l'unité et inférieur à p^2. Dans ces conditions, l'homographie déterminée par T dans le plan AA_1A_p pourra être représentée par

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\tau x_3 ,$$

$x_2=0$ et $x_3=0$ étant les équations des droites $a_1=AA_1$, $a_p=AA_p$.

La puissance $p^{\text{ième}}$ de cette homographie doit être une homologie (de période p) de centre A et d'axe A_1A_p. Les nombres ε^p et $\varepsilon^{\tau p}$ doivent donc être congrus par rapport à p^2; on doit donc avoir $\tau = kp + 1$, k étant un entier positif inférieur à p.

Les courbes C'_{11} ont en A la multiplicité p, les tangentes étant confondues avec a_1, a_p, soit

$$x_2^{p-i}\, x_3^{\,i} = 0$$

l'équation de l'ensemble de ces tangentes. On doit donc avoir

$$p - i + i\,(kp + 1) = p\,(ki + 1) = \lambda p^2 .$$

Les courbes C''_{11} ont en A la multiplicité $2p$, p tangentes étant variables et les autres étant confondues avec a_1 et a_p. L'équation de ces tangentes est nécessairement de la forme

$$x_2^{p-j}\, x_3^{\,j}\,(\lambda_2\, x_2^p + \lambda_3\, x_3^p) = 0 ,$$

et on doit avoir

$$p - j + j\,(kp + 1) = p\,(kj + 1) = \mu p^2 - p .$$

Supposons $2i < p$ et observons que l'on a

$$p - 2i + 2i\,(kp + 1) = p\,(2ki + 1) = 2\lambda p^2 - p .$$

Si $2i > p$, on a $2(p-i) < p$ et

$$2(p-i) + (2i-p)\,(kp+1) = p(2ki+1) - kp^2 = (2\lambda - k)\, p^2 - p .$$

Comme les restes de la division par p des nombres $kj+1$ ($j=1, \ldots, p-1$) sont tous différents, on en conclut que l'on a $j = 2i$ si $2i < p$ et $j = 2i - p$ si $2i > p$.

Reprenons nos notations primitives. Nous avons appelé ν le nombre des tangentes en A aux courbes C'_{11} confondues avec a_1; nous pouvons supposer sans restriction $2\nu < p$. Alors les courbes C''_{11} ont en A, 2ν tangentes confondues avec a_1 et p $-$ 2ν avec a_p.

21. Dans le cas général, les différentes branches d'origine A des courbes C'_{11} ont en commun des suites de points fixes qui se terminent par des points A_{11}, A_{12}, ..., A_{1m}, A_{21}, ..., A_{2n}, unis parfaits pour l'involution I_q (n° 8). Les branches qui contiennent les premiers points touchent en A la droite a_1, les autres branches touchent en ce point la droite a_p. Aux domaines des points A_{11}, A_{12}, ..., A_{2n} correspondent sur la surface Φ' des courbes rationnelles γ_{11}, γ_{12}, ..., γ_{2n}, respectivement d'ordres ν_{11}, ν_{12}, ..., ν_{2n}, dont l'ensemble représente le domaine du point de diramation A″ correspondant, sur la surface Φ, au point uni A.

Posons

$$\nu_1 = \nu_{11} + \nu_{12} + \dots + \nu_{1m}\,, \quad \nu_2 = \nu_{21} + \nu_{22} + \dots + \nu_{2n}$$

et appelons γ_1 la courbe $\gamma_{11} + \dots + \gamma_{1m}$, d'ordre ν_1 et γ_2 la courbe $\gamma_{21} + \dots + \gamma_{2n}$ d'ordre ν_2. Aux courbes C''_{11} correspondent sur Φ' des courbes Γ_{11}'' découpées par les hyperplans passant par un point de la surface, unique point commun aux courbes γ_1, γ_2. Soit φ la courbe équivalente au domaine de ce point. (Si celui-ci est simple pour la surface Φ', la courbe φ est rationnelle et de degré -1.) Observons que la courbe φ comprend au moins comme partie la courbe rationnelle γ_0 qui représente les groupes de p points (variables) infiniment voisins de A, formant des groupes de l'involution I_q.

Nous avons

$$\Gamma_{11} \equiv \Gamma'_{11} + \gamma_1 + \varphi + \gamma_2\,.$$

La courbe φ rencontrant γ_1 et γ_2 chacune en un point, on en déduit, en coupant Γ_{11} successivement par γ_1, γ_2, φ, que ces courbes sont respectivement de degré $-(\nu_1+1)$, $-(\nu_2+1)$ et -2. Le point A''_{11} de Φ', commun aux hyperplans des courbes Γ''_{11}, est donc double pour cette surface. Il est de plus double biplanaire ou uniplanaire, car la courbe γ_0, qui fait partie de φ, est rencontrée en un point par les courbes Γ''_{11}, c'est donc, sur la surface Φ', une droite infiniment voisine de A_1''. Cette droite est unique si le point A_1'' est uniplanaire; il en existe une seconde, que nous désignerons par γ_1', si le point A_1'' est biplanaire.

22. Posons $p=2\eta+1$ et supposons que la courbe γ_1 soit irréductible et d'ordre $\nu_1 \leqslant \eta$.

Les courbes C'_{11} ont en commun une suite de h points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_h=A_{11}$, infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur la droite a_1. Le point P_h est multiple d'ordre ν_1 pour les courbes C'_{11} et les points $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$ doivent avoir la même multiplicité pour ces courbes, car si les multiplicités des courbes C'_{11} en deux points consécutifs de la suite étaient différentes, la courbe γ_1 serait réductible (n° 19). Pour la même raison, les courbes C'_{11} ont ν_1 de leurs tangentes en A confondues avec a_1.

En considérant les intersections des courbes C'_{11} et C_{2p} absorbées en A, on a

$$p+h\nu_1=p^2$$

et ν_1 doit donc être un diviseur de $p-1$.

Les courbes C_1'' ont en A la multiplicité $2p$, $2\nu_1$ de leurs tangentes confondues avec a_1 (n° 20), $p-2\nu_1$ confondues avec a_p et p tangentes variables. Sur la surface Φ', la courbe γ_1 passe par le point A_1'' et par conséquent, elle est projetée de ce point, sur la surface Φ'', suivant une courbe d'ordre ν_1-1. Il en résulte que le point P_h est multiple d'ordre ν_1-1 pour les courbes C_1''.

Soient $\rho'_{11}, \rho'_{12}, \ldots, \rho'_{1h-1}$ les multiplicités des points $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$ pour les courbes C_1''. On a $\rho'_{11} \leqslant 2\nu_1$. Si l'on a $\rho'_{11} < 2\nu_1$, il existe au moins une branche d'origine A de chaque courbe C''_{11} qui se détache en P_1. Si $\rho'_{11}=2\nu_1$, il existe au moins deux points consécutifs P_{j-1}, P_j tels que $\rho'_{1j-1} > \rho'_{1j}$. Il y a donc au moins une branche d'origine A de chaque courbe C''_{11} qui se détache au point P_j. Dans chaque cas, cette branche conduit à un point uni parfait de l'involution I_q, commun à toutes les courbes C_{11}''; ce point donne naissance à une courbe du domaine du point A_1'' sur la surface Φ'. Cette courbe ne peut être la droite γ_0; elle coïncide donc avec la droite γ_1'. Il en résulte que le point A_1'' est double biplanaire pour la surface Φ' et que, d'autre part, le point A est l'origine d'une seule branche des courbes C''_{11} qui ne passe pas par P_h. On aura

$$\rho'_{11} = \dots = \rho'_{1j-1} = 2\nu_1 \,,\ 2\nu_1 > \rho'_{1j} > \nu_1 - 1,$$
$$\rho'_{1j+1} = \dots = \rho'_{1h} = \nu_1 - 1 \,.$$

Si la courbe γ_1 *est irréductible et d'ordre* $\nu_1 \leqslant \eta$ $(p = 2\eta + 1)$, *le point* A_1'' *est double biplanaire pour la surface* Φ'.

23. Nous allons traiter complètement un exemple; nous supposerons la courbe γ_1 irréductible $(m = 1)$ et du second ordre, la courbe γ_2 réductible en deux parties $(n = 2)$, γ_{21} et γ_{22}.

Dans cette hypothèse, d'après ce qu'on vient de voir, les courbes C'_{11} ont en commun une suite de $h = \frac{1}{2}p(p-1) = p\eta$ points doubles fixes $P_1, P_2, \dots, P_{p\eta}$, dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_q (ces points étant infiniment voisins successifs de A et P_1 appartenant à a_1).

Les $j-1$ premiers points de la suite $P_1, P_2, \dots, P_h$ sont quadruples pour les courbes C''_{11} et les $h-j$ derniers sont simples pour ces courbes. En considérant les intersections d'une courbe C''_{11} avec une courbe C_{2p} absorbés en A, on a

$$2p + 4(j-1) + \rho'_{1j} + h - j = \lambda p^2 \,,$$

λ étant un entier positif. La multiplicité ρ'_{1j} de P_j pour les courbes C''_{11} satisfait à la double inégalité $2 \leqslant \rho'_{1j} \leqslant 3$. En tenant compte de la valeur de $h = p\eta$ et du fait que j est inférieur à h, on trouve $\lambda = 1$. On a alors

$$\frac{1}{6}(p-1)(p-2) \leqslant j \leqslant \frac{1}{6}(p-1)(p-2) + \frac{1}{3} \,,$$

d'où

$$j = \frac{1}{6}(p-1)(p-2) \,,\ \rho'_{1j} = 3 \,.$$

Au point P_j sont infiniment voisins deux points appartenant aux courbes C''_{11} : l'un est le point simple P_{j+1}, l'autre est un point que nous désignerons par P_1'. D'après l'observation faite plus haut (n° 19), ce point est simple pour les courbes C''_{11}, puisque P_{j-1} est quadruple pour ces courbes. Les courbes C''_{11} ont en commun un certain nombre de points simples fixes P_2', P_3', ..., P_l', infiniment voisins successifs de P_1', le dernier P_l' étant uni parfait pour l'involution I_q et donnant naissance à la droite γ_1' de la surface Φ'. On peut affirmer que l'on a $l \geqslant 2$ et on prouvera plus loin que l'on a précisément $l = 2$.

Ainsi donc, les courbes C'_{11} ont en commun une suite de $\frac{1}{2}p\ (p-1)$ points doubles infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur a_1. Les $\frac{1}{6}\ (p-1)(p-2)-1$ premiers de ces points sont quadruples pour les courbes C''_{11}, le suivant est triple et les autres simples pour ces courbes. Les courbes C''_{11} ont en commun en outre un certain nombre, au moins égal à deux, de points simples, infiniment voisins successifs du point triple.

24. Occupons-nous maintenant des branches d'origine A des courbes C'_{11}, C''_{11} tangentes en ce point à la droite a_p. Nous désignerons comme plus haut par Q_1, Q_2, ..., Q_k les points infiniment successifs de A appartenant aux courbes C_{21} et aux branches considérées, par ρ_{21}, ρ_{22}, ..., ρ_{2k} leurs multiplicités pour les courbes C'_{11}, par ρ'_{21}, ρ'_{22}, ..., ρ'_{2k} leurs multiplicités par les courbes C''_{11}.

Au point Q_k, qui est uni parfait pour l'involution I_q, correspond sur la surface Φ' l'une des courbes γ_{21}, γ_{22} composant γ_2. Le fait que la courbe γ_2 se scinde en deux parties implique qu'en un certain point Q_j de la suite Q_1, ..., Q_k se détache une suite de points infiniment voisins successifs, Q_1', Q_2', ..., dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_q, qui appartiennent aux courbes C'_{11} avec certaines multiplicités ρ_1, ρ_2, ... et aux courbes C''_{11} avec les multiplicités ρ_1', ρ_2', ...

Les courbes C''_{11} ne peuvent avoir en commun, dans le domaine de A, aucun point fixe n'appartenant pas aux courbes C'_{11}, car le point A_1'' est double biplanaire pour la surface Φ' et ses composantes, γ_0 et γ_1', sont connues.

Rappelons que les courbes C'_{11} et C''_{11} ont respectivement $p-2$ et $p-4$ tangentes en A confondues avec la droite a_p.

En comptant les intersections absorbées en A d'une courbe C_{21} et d'une courbe C'_{11} ou d'une courbe C''_{11}, de deux courbes C'_{11}, d'une courbe C'_{11} et d'une courbe C''_{11}, de deux courbes C''_{11}, on obtient les relations

$$\Sigma\rho_{2i} = p^2 - p \,, \quad \Sigma\rho'_{2i} = p^2 - 2p \,, \tag{1}$$

$$\Sigma\rho_{2i}^2 + \Sigma\rho_i^2 = p^2(\nu_2-1) + 2p \,, \tag{2}$$

$$\Sigma\rho_{2i}\,\rho'_{2i} + \Sigma\rho_i\,\rho_i' = p^2(\nu_2-2) + 4p \,, \tag{3}$$

$$\Sigma\rho'^2_{2i} + \Sigma\rho'^2_i = p^2(\nu_2-3) + 8p + 2 - l \tag{4}$$

Enfin, en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe Γ'_{11} et la courbe C'_{11} homologue, ou entre une courbe Γ''_{11} et la courbe C''_{11} homologue, on trouve

$$\Sigma\rho_i + \nu_2 = p - 2 \,, \tag{5}$$

$$\Sigma\rho_i' + l + \nu_2 = p - 1 \,. \tag{6}$$

25. Les composantes γ_{21}, γ_{22} de la courbe γ_2 se rencontrent en un point et l'une de ces courbes, pour fixer les idées γ_{22}, rencontre en un point la droite γ_0. Supposons en premier lieu que ce soit la courbe γ_{22} qui corresponde au point Q_k.

Les points Q_1, Q_2, ..., Q_{j-1} sont multiples d'ordre $p-2$ pour les courbes C'_{11} et d'ordre $p-4$ pour les courbes C''_{11}. Les points Q_{j+1}, ..., Q_k sont multiples d'ordre ν_{22} (ordre de la courbe γ_{22}) pour les courbes C'_{11}, d'ordre $\nu_{22}-1$ pour les courbes C''_{11}. Les points Q_1', Q_2', ... sont multiples d'ordre ν_{21} pour les courbes C'_{11} et C''_{11}.

D'après la remarque faite plus haut (n° 19), nous avons

$$p - 2 = \rho_{2j-1} = \rho_{2j} + \lambda\nu_{21} \,, \quad p - 4 = \rho'_{2j-1} = \rho'_{2j} + \lambda\nu_{21} \,,$$

λ étant un entier positif. On en déduit $\rho_{2j} = \rho'_{2j} + 2$.

Appliquons les formules (1) et soustrayons-les membre à membre; nous obtenons

$$j+k=p.$$

D'autre part, si tous les nombres ρ_{1i} étaient égaux à $p-2$, on aurait $k>p$, donc on a certainement $k>p$ et on est conduit à une contradiction.

Il en résulte que la courbe γ_{21} correspond au point Q_k et la courbe γ_{22} au dernier point de la suite Q_1', Q_2', ...

26. Les courbes C'_{11} ont la multiplicité $p-2$ aux points Q_1, Q_2, ..., Q_{j-1}, la multiplicité ν_{21} aux points Q_{j+1}, ..., Q_k et la multiplicité ν_{22} aux points Q_1', Q_2', ... Les courbes C''_{11} ont la multiplicité $p-4$ aux points Q_1, Q_2, ..., Q_{j-1}, la multiplicité ν_{21} aux points Q_{j+1}, ..., Q_k et la multiplicité $\nu_{22}-1$ aux points Q_1', Q_2', ...

On a actuellement

$$\rho_{2j-1}=p-2=\rho_{2j}+\lambda\nu_{22}\,,\quad \rho'_{2j-1}=p-4=\rho'_{2j}+\lambda(\nu_{22}-1)\,,$$

λ étant un entier. D'autre part, on a

$$\rho_{2j}=\nu_{21}+\nu_{22}\,,\quad \rho'_{2j}=\nu_{21}+\nu_{22}-1\,,$$

d'où $\rho_{2j}=\rho'_{2j}+1$ et $\lambda=1$.

Les relations (1) donnent, par soustraction membre à membre, $j=\eta+1$.

Soit μ le nombre des points Q_1', Q_2', ... Les équations (2), (3) et (4) deviennent

$$\rho_{2j}^2+(k-\eta-1)\,\nu_{21}^2+\mu\nu_{22}^2=p^2(\nu_2-\eta+1)-2p+2\,, \tag{2'}$$

$$\begin{aligned}\rho_{2j}(\rho_{2j}-1)+(k-\eta-1)\,\nu_{21}^2+\mu\nu_{22}(\nu_{22}-1)&\\ =p^2(\nu_2-\eta+1)-3p+4\,,&\end{aligned} \tag{3'}$$

$$\begin{aligned}(\rho_{2j}-1)^2+(k-\eta-1)\,\nu_{21}^2+\mu(\nu_{22}-1)^2&\\ =p^2(\nu_2-\eta+1)-4p+10-l\,.&\end{aligned} \tag{4'}$$

Des deux premières, on déduit par soustraction,

$$\rho_{2j}+\mu\nu_{22}=p-2$$

et des deux dernières,

$$\rho_{2j} + \mu\nu_{22} = p - 5 + \mu + l \,.$$

Par suite, $\mu + l = 3$ et comme $l \geqslant 2$, $\mu \geqslant 1$, on a $l = 2$, $\mu = 1$. Le point Q_1', infiniment voisin de Q_j, est donc uni parfait pour l'involution I_q.

On a de plus $\rho_{2j} + \nu_{22} = p - 2$ et, par les relations (5) et (6), $\nu_{22} + \nu_2 = p - 2$, d'où $\rho_{2j} = \nu_2$ et

$$\nu_{21} + 2\nu_{22} = p - 2 \,.$$

La relation (1) donne

$$(2k - p)\,\nu_{21} = p^2 \,.$$

Or ν_{21} est inférieur à p et p est premier; on a donc

$$\nu_{21} = 1 \,, \quad k = \frac{1}{2}\,p(p+1) = p(\eta+1) \,.$$

On en déduit enfin

$$\nu_{22} = \frac{1}{2}\,(p-3) = \eta - 1 \,, \quad \rho_{2j} = \eta \,.$$

En résumé, les courbes C'_{11} ont en A la multiplicité p et une suite de $\frac{1}{2}p(p-1)$ points doubles infiniment voisins successifs dans une direction, une seconde suite de $\frac{1}{2}p(p+1)$ points infiniment voisins successifs dans une seconde direction; les η premiers de ces points sont multiples d'ordre $p-2$, le suivant multiple d'ordre η et les derniers sont simples; au point multiple d'ordre η est en outre infiniment voisin un point multiple d'ordre $\eta - 1$.

Les courbes C''_{11} ont en A la multiplicité $2p$, une suite de $\frac{1}{2}p(p-1)$ points infiniment voisins successifs de A et, dans une autre direction, une suite de $\frac{1}{2}p(p+1)$ points infiniment voisins successifs de A. Les $\frac{1}{6}\,(p-1)\,(p-2) - 1$ points de la première suite sont multiples d'ordre quatre, le suivant triple et les autres sont simples; au point triple sont infiniment voisins successifs deux points simples. Les

η premiers points de la seconde suite sont multiples d'ordre $p-4$, le suivant est multiple d'ordre $\eta-1$ et les autres sont simples; au point multiple d'ordre $\eta-1$ est infiniment voisin un point multiple d'ordre $\eta-2$.

27. Au point double biplanaire A_1'' de la surface Φ' peuvent être infiniment voisins successifs un certain nombre de points doubles biplanaires, le dernier point de la suite étant soit biplanaire ordinaire, soit double conique. Le point multiple A'' de la surface Φ sera dans tous les cas équivalent à une suite de courbes rationnelles

$$\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t, \gamma_1', \gamma_1 ,$$

chacune de ces courbes rencontrant en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontrant pas les autres. La courbe γ_{22} est d'ordre $\eta-1$ et de degré $-(\eta+1)$, la courbe γ_1 est une conique de degré -3, les autres courbes sont des droites de degré -2.

Les courbes Γ_{21} donnent lieu à une relation fonctionnelle de la forme

$$p^2\Gamma_{11} = p^2\Gamma_{21} + \lambda_{21}\gamma_{21} + \lambda_{22}\gamma_{22} + \lambda_0\gamma_0 + \mu_1\delta_1 + \ldots \mu_t\delta_t + \lambda_1'\gamma_1' + \lambda_1\gamma_1 + \Delta ,$$

Δ étant un terme provenant de la présence d'autres points de diramation. Exprimons que les courbes Γ_{21} coupent la droite γ_{21} en un point. On a

$$\lambda_1' = 3\lambda_1, \ \mu_t = 5\lambda_1, \ \mu_{t-1} = 7\lambda_1, \ldots, \ \mu_2 = (2t+1)\lambda_1, \ \mu_1 = (2t+3)\lambda_1,$$
$$\lambda_0 = (2t+5)\lambda_1 , \ \lambda_{22} = (2t+7)\lambda_1 , \ \lambda_{21} = (2t\eta+7\eta+2)\lambda_1 ,$$
$$p^2 - 2\lambda_{21} + \lambda_{22} = 0 .$$

On en déduit $t = \frac{1}{2}(p-5) = \eta-2$ et $\lambda_1 = 1$. La relation fonctionnelle précédente s'écrit

$$p^2\Gamma_{11} = p^2\Gamma_{21} + (2\eta^2+5\eta+2)\gamma_{21} + (2\eta+3)\gamma_{22} + (2\eta+1)\gamma_0 + (2\eta-1)\delta_1 + \ldots + 7\delta_{\eta-3} + 5\delta_{\eta-2} + 3\gamma_1' + \gamma_1 + \Delta .$$

On trouve de même

$$p^2\Gamma_{11} \equiv p^2\Gamma_{2p} + \gamma_{21} + 2\gamma_{22} + (2\eta+1)\gamma_0 + 4\eta\,\delta_1 + \ldots + (2\eta^2-3\eta+3)\delta_{\eta-2} + (2\eta^2-\eta+2)\gamma_1' + (2\eta^2+\eta+1)\gamma_1 + \Delta' ,$$

Δ' provenant de la présence des autres points de diramation.

La surface Φ possède en A'' un point multiple d'ordre $\eta+2$ auquel sont infiniment voisins successifs soit $\frac{1}{2}\eta$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire si η est pair, soit $\frac{1}{2}(\eta-1)$ points doubles biplanaires suivis d'un point double conique si η est impair.

Liége, le 17 février 1940.