Bulletin de la Classe des sciences

Sur les polyèdres de Laplace à faces planes

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une suite de Laplace dont les points appartiennent aux plans déterminés par trois points consécutifs d'une suite de Laplace donnée.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les polyèdres de Laplace à faces planes

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une suite de Laplace dont les points appartiennent aux plans déterminés par trois points consécutifs d'une suite de Laplace donnée.

Une suite de Laplace étant donnée, nous appelons polyèdre de Laplace d'espèce n associé à cette suite ou plus simplement polyèdre de Laplace, l'ensemble des espaces à n dimensions déterminées par $n + 1$ points consécutifs de la suite donnée. Pour $n = 1$, le polyèdre devient le polygone de Laplace et pour $n = 2$, le polyèdre à faces planes. C'est ce dernier cas que nous considérons ici.

Notre but est de construire une suite de Laplace inscrite dans un polyèdre à faces planes donné. Nous établissons le théorème suivant:

Étant donné une suite de Laplace

$$\ldots, Y^n, \ldots, Y^1, Y, X, X^1, \ldots, X^n, \ldots$$

les variables étant u, v et dans la suite précédente, chaque point étant le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u, s'il existe une suite de Laplace inscrite dans le polyèdre de Laplace associé à la suite donnée, le point A *étant situé dans le plan* Y^1YX *et son transformé de Laplace* B *dans le sens des u dans le plan* YXX^1, *elle se détermine de la manière suivante:*

La droite Y^1A *coupe la droite* XY *en un point* P *et si la droite* PP_u *coupe la droite* XX^1 *en un point* P^1, *la droite* YP^1 *passe par* B, *La droite* X^1B *coupe* XY *en un point* Q *et si la droite* QQ_v *coupe la droite* YY^1 *en un point* Q^{-1}, *la droite* XQ^{-1} *passe par* A.

Réciproquement, nous construisons la suite de Laplace à laquelle appartiennent A *et* B *en partant de deux points* P, Q *donnés sur la droite* XY.

On remarquera que la droite $P^1P^1_v$ ne passe pas par P et que la droite $Q^{-1}Q^{-1}_u$ ne passe pas par Q.

1. Une suite de Laplace L étant donnée dans un espace S_r à r dimensions, les variables étant u et v, on peut toujours choisir les facteurs de proportionalité des coordonnées de manière que deux points X, Y consécutifs de la suite satisfassent aux conditions

$$X_v = aY, \; Y_u = bX,$$

a et b étant des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire.

Nous désignerons par $X^1, X^2, \ldots$ les transformés successifs de X de Laplace dans le sens des u et par $Y^1, Y^2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de Y dans le sens des v. La suite L s'écrira

$$\ldots, Y^n, \ldots, Y^1, Y, X, X^1, \ldots, X^n, \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Le point X satisfait à l'équation de Laplace

$$X_{uv} - X_v(\log. a)_u - ab\, X = 0$$

et le point Y à l'équation

$$Y_{uv} - Y_u(\log. b)_v - ab\, Y = 0.$$

Nous poserons

$$h_l = -(\log. bh_1 \ldots h_{l-1})_{uv} + h_{l-1},$$

$$k_l = -(\log. ak_1 \ldots k_{l-1})_{uv} + k_{l-1}$$

en convenant que $h_0 = k_0 = ab$.

Nous aurons

$$X^{i-l}_u = X^i + X^{i-l}(\log. ak_1 \ldots k_{i-l})_u, X^i_v = k_i X^{i-l},$$

$$Y^{i-l}_v = Y^i + Y^{i-l}(\log. bh_1 \ldots h_{i-l})_v, Y^i_u = h_i Y^{i-l}.$$

2. Un point A appartenant au plan Y^1YX peut être représenté par

$$A = \lambda Y^1 + \lambda^1 Y + \mu X,$$

λ, λ^1 et μ étant des fonctions de u, v différenciables autant de fois qu'il sera nécessaire.

En dérivant par rapport à u, on a

$$A_u = \lambda_u Y^1 + (\lambda_u^1 - h_1\lambda)Y + [b\lambda^1 + \mu(\log. a\mu)_u X + \mu X^1.$$

Le point

$$B = A_u - A \log. \lambda)_u$$

appartient au plan YXX^1. On a précisément

$$B = \left[h_1\lambda + \lambda^1\left(\log.\frac{\lambda^1}{\lambda}\right)_u\right]Y + \left[b\lambda^1 + \mu\left(\log.\frac{a\mu}{\lambda}\right)_u\right]X + \mu X^1.$$

Posons

$$\mu^1 = b\lambda^1 + \mu\left(\log.\frac{a\mu}{\lambda}\right)_u, \tag{1}$$

$$\mu^2 = h_1\lambda + \lambda_1\left(\log\frac{\lambda^1}{\lambda}\right)_u \tag{2}$$

On peut écrire

$$B = \mu X^1 + \mu^1 X + \mu^2 Y.$$

En dérivant par rapport à v, on a

$$B_v = \mu_v X^1 + (k_1\mu + \mu_v^1)X + [a\mu^1 + \mu^2(\log. b\mu^2)_v]Y + \mu^2 Y^1.$$

Le point $B_v - B$ (log. $\mu)_v$ est situé dans le plan Y^1YX. Si les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre, nous aurons donc

$$A = B_v - B(\log. \mu)_v$$

et ensuite

$$A = \left[k\mu + \mu^1\left(\log.\frac{\mu^1}{\mu}\right)_v\right]X + \left[a\mu^1 + \mu^2\left(\log.\frac{b\mu^2}{\mu}\right)_v\right]Y + \mu^2 Y^1$$

Nous devrons donc avoir

$$\mu^2 = \lambda.$$

$$\mu = k_1\mu + \mu^1\left(\log.\frac{\mu^1}{\mu}\right)_v. \tag{3}$$

$$\lambda^1 = a\mu^1 + \lambda\left(\log.\frac{b\lambda}{\mu}\right)_v. \tag{4}$$

3. Des relations

$$B = A_u(\log.\ \lambda)_u,\ A = B_v - B(\log.\ \mu)_v$$

on déduit les équations de Laplace auxquelles satisfont A et B. Nous avons

$$A_{uv} - A_v(\log.\lambda)_u - A_u(\log.\mu)_v - A[(\log.\lambda)_{uv} - (\log.\lambda)_u(\log.\mu)_v + 1] = 0,$$

et

$$B_{uv} - B_u(\log.\mu)_v - B_v(\log.\lambda)_u - B[(\log.\mu)_{uv} - (\log.\lambda)_u(\log.\mu)_v + 1] = 0.$$

4. Désignons par P le point de rencontre de la droite Y^1A et de la droite XY.

En dérivant par rapport à u, on a

$$P = \lambda^1 Y + \mu X = A - \lambda Y^1,$$

$$P_u = A_u - \lambda_u Y^1 - h^1 \lambda Y = B + (A - \lambda Y^1)(\log.\ \lambda)_u - h_1 \lambda Y,$$

$$P_u - P(\log.\ \lambda)_u = B - h_1 \lambda Y.$$

Il en résulte que les droites PP_u et YB rencontrent la droite XX^1 au même point c'est-à-dire au point

$$P^1 = \mu X^1 + \mu^1 X = B - \lambda Y.$$

Si l'on part de

$$P = \lambda^1 Y + \mu X,$$

on obtient

$$P_u - P(\log.\ \lambda)_u = \lambda\left(\log.\frac{\lambda^1}{\lambda}\right)_u Y + \left[b\lambda^1 + \mu\left(\log.\frac{a\mu}{\lambda}\right)_u\right] X + \mu X^1.$$

Le coefficient de X est égal à μ^1 par la formule (1) et la droite PP_u rencontre bien XX^1 au point P^1.

D'autre part, en utilisant la formule (2), où l'on fait $\mu^2 = \lambda$, on a

$$\lambda^1\left(\log.\frac{\lambda^1}{\lambda}\right)_u = \lambda - h_1\lambda,$$

ce qui montre que l'on obtient bien pour $P_u - P(\log.\ \lambda)_u$ la même relation que précédemment.

De

$$P^1 = B - \lambda Y,$$

on tire

$$P_v^1 - P^1(\log.\mu)_v = A - \lambda\left(\log.\frac{b\lambda}{\mu}\right)_v Y - \lambda Y^1$$

où, en utilisant la relation (4),

$$P_v^1 - P^1(\log.\mu)_v = A - (\lambda^1 Y + \lambda Y^1) + a\mu^1 Y = \mu X + a\mu^1 Y.$$

Par conséquent, la droite $P^1P_v^1$ ne passe pas par le point P, la fonction a n'étant pas en général égale à l'unité.

5. La droite X^1B rencontre la droiteXY en un point

$$Q = \mu^1 X + \lambda Y = B - \mu X^1.$$

et la droite XA rencontre la droite YY^1 en un point

$$Q^{-1} = \lambda Y^1 + \lambda^1 Y = A - \mu X.$$

On a

$$Q_v = B_v - \mu_v X^1 - h_1 \mu X,$$

$$Q_v = A + (B - \mu X^1)(\log.\mu)_v - k_1 \mu X,$$

$$Q_v - Q(\log.\mu)_v = A - k_1 \mu X.$$

La droite QQ_v rencontre donc la droite YY^1 au même point que la droite XA, c'es-à-dire au point Q^{-1}.
De $Q^{-1} = A - \mu X$, on tire

$$Q_u^{-1} - Q^{-1}(\log.\lambda)_u = B - \mu\left(\log.\frac{a\mu}{\lambda}\right)_u - \mu X^1,$$

ou, en utilisant la relation (1),

$$Q_u^{-1} - Q^{-1}(\log.\lambda)_u = \lambda Y + b\lambda^1 X.$$

Il en résulte que la droite $Q^{-1}Q_u^{-1}$ ne passe pas par le point Q.

6. Le transformé de Laplace de B dans le sens des u est

$$B^1 = B_u - B(\log.\lambda)_u,$$

c'est-à-dire

$$B^1 = \left[b\lambda + \mu^1\left(\log.\frac{a\mu^1}{\lambda}\right)_u\right]X + \left[\mu^1 + \mu\left(\log.\frac{ak_1\mu}{\lambda}\right)_u\right]X^1 + \mu X^2.$$

On a d'autre part

$$P^1_u - P^1(\log.\ \lambda)_u = B^1 - b\lambda X,$$

ce qui montre que les droites $P^1P^1_u$, XB^1 et X^1X^2 sont concourantes.

Le point B^1 se trouve donc sur la droite joignant le point X au point de rencontre de la droite $P^1P^1_u$ avec la droite X^1X^2.

Observons que le point B^1 est une expression linéaire des points X, X^1, X^2, par conséquent B^1_v sera une expression linéaire des points Y, X, X^1, X^2. Dans B^1, le coefficient de X^2 est μ et dans B^1_v, $\mu(\log.\ \mu)_v$, par conséquent l'expression

$$B^1_v - B^1(\log.\ \mu)_v$$

est une expression linéaire des points Y, X, X^1. On en conclut que le point B est donné par

$$B = B^1_v - B^1(\log.\ \mu)_v.$$

7. Le transformé de Laplace de A dans le sens des v est

$$A^1 = A_v - A(\log.\ \mu)_v.$$

On a donc

$$A^1 = \left[a\mu + \lambda^1\left(\log.\frac{b\lambda^1}{\mu}\right)_v\right]Y + \left[\lambda^1 + \lambda\left(\log.\frac{bh_1\lambda}{\mu}\right)_v\right]Y^1 + \lambda Y^2.$$

On a d'autre part

$$Q_v^{-1} = A_v - \mu_v X - a\mu Y,$$

$$Q_v^{-1} = A^1 - (A - \mu X)(\log.\ \mu)_v - a\mu Y,$$

$$Q_v^{-1} - Q^{-1}(\log.\ \mu)_v = A^1 - a\mu Y.$$

Il en résulte que le point A^1 se trouve sur la droite joignant le point Y au point de rencontre de la droite $Q^{-1}Q_v^{-1}$ avec la droite Y^1Y^2.

En raisonnant comme on l'a fait pour obtenir la relation entre B^1 et B, on obtient

$$A = A^1_u - A^1(\log.\ \lambda)_u.$$

Liège, le 13 juillet 1972.