La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé

AVANT-PROPOS

Des conversations que nous avons eues avec Fubini et Tzitzeica lors du Congrès des mathématiciens à Toronto en 1924 et de fréquentes conversations avec Demoulin nous ont conduit à des recherches sur la Géométrie projective différentielle des surfaces. Deux propriétés nous avaient particulièrement intéressé. D'une part un théorème établi vers la même époque et d'une manière indépendante par Tzitzeica (1) et M. Bompiani (2), suivant lequel les tangentes aux asymptotiques d'une surface se correspondent dans une transformation de Laplace. D'autre part une proposition beaucoup plus ancienne, due à Darboux (3) : Les droites d'une congruence W forment un réseau conjugué.

Dans le mémoire qui vient d'être cité, M. Bompiani utilise systématiquement la représentation des droites de l'espace par les points d'une hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions, suivant Klein. C'est d'ailleurs aussi à cette représentation qu'a recours Tzitzeica. Plus tard, M. Bompiani (4) a consacré un nouveau travail à cette représentation, appliquée à la théorie des surfaces. Ce fut le point de départ de nos recherches.

Une surface de l'espace ordinaire étant donnée, les tangentes aux asymptotiques des deux modes sont représentées sur l'hyperquadrique de Klein par deux surfaces et les points de celles-ci correspondant à deux tangentes en un même point de la surface

---

(1) Tzitzeica, *Sur un théorème de M. Darboux* (C. R., 1910, t. XCI, pp. 971-974).

(2) Bompiani, *Sull' equazione di Laplace* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912, t. 34, pp. 383-407).

(3) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1889).

(4) Bompiani, *La Geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1926, pp. 395-400 ; 2° sem. 1926, pp. 262-267).

sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Cela conduit à attacher à la surface une suite de Laplace L déterminée par ces deux points, suite qui est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique de Klein. L'utilisation de cette propriété et de celles de la transformation de Laplace permet d'obtenir de nombreux théorèmes sur les surfaces. C'est ainsi que les couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie, dont l'existence avait été signalée par Demoulin, peuvent s'étudier, comme nous l'avons montré, très simplement par la considération de la suite L, qui a alors la période six.

Aux surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires correspondent des suites de Laplace terminées.

Après avoir exposé la théorie générale, nous considérons les surfaces liées à des suites de Laplace périodiques ou terminées. Nous étudions ensuite les congruences W en partant du théorème de Darboux rappelé plus haut. Nous donnons d'ailleurs une démonstration géométrique de ce théorème.

Nous avons publié autrefois une monographie sur des questions traitées dans ce travail, mais sans donner toutes les démonstrations (1) ; nous y renvoyons pour la bibliographie antérieure à 1934.

Nous indiquons ici les ouvrages qui ont été consacrés à la Géométrie projective différentielle des surfaces (2).

Liège, le 18 mars 1964.

---

(1) Godeaux, *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* Actualités scientifiques, N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

(2) Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux.* Paris, Gauthier-Villars, 1924.

Fubini et Cech, *Geometria proiettive differenziale.* 2 volumes, Bologne Zanichelli, 1927.

— *Introduction à la Géométrie projective différentielle.* Paris, Gauthier-Villars, 1931.

Vranceanu, *Leçons de Géométrie différentielle.* 2 volumes, Bucarest, Académie-1947-1951.

Bol, *Projektive Differentialgeometrie.* 2 volumes, Goettingue, Vandenhoeck et Ruprecht, 1950-1954.

Finikow, *Theorie der Kongruenzen* (trad. par G. Bol). Berlin, Akademie-Verlag, 1959.

Mihailescu, *Geometrie diferentiale proiectiva.* Bucarest, Académie, 2 volumes, 1962, 1963.

I. Suite de Laplace associée a une surface.

1. *Équations de Wilczynski.* — Soit (x) une surface de l'espace ordinaire rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes du point x satisfont à un système de deux équations aux dérivées partielles, complètement intégrable, que l'on obtient en écrivant que les plans osculateurs aux courbes u, v coïncident avec les plans tangents à la surface.

Le plan tangent à la surface (x) en un point ordinaire (non parabolique) x est déterminé par les points x, x_u, x_v. Le plan osculateur à la courbe u (sur laquelle u varie) est déterminé par les points x, x_u, x_{uu}. Ces deux plans devant coïncider, le point x doit satisfaire à l'équation

$$x_{uu} + a'x_u + bx_v + c_1x = 0. \tag{1}$$

En exprimant que la courbe v est une asymptotique, on a de même l'équation

$$x_{vv} + ax_u + b'x_v + c_2x = 0. \tag{2}$$

Dans ces équations, nous supposerons que les coefficients sont des fonctions de u, v dérivables autant de fois qu'il nous sera nécessaire.

Le système des équations (1) et (2) étant complètement intégrable, nous devons avoir

$$\frac{\partial^2 x_{uu}}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x_{vv}}{\partial u^2}.$$

En exprimant que dans ces expressions, les coefficients de x_{uv} sont égaux, on obtient la condition

$$a'_v = b'_u. \tag{3}$$

Remplaçons dans les équations (1) et (2) les coordonnées du point x par celles du point $\lambda\bar{x}$. Dans les équations obtenues, les coefficients de $\bar{x}_u$ et de $\bar{x}_v$ sont respectivement

$$2\lambda_u + a'\lambda, \; 2\lambda_v + b'\lambda.$$

En vertu de la relation (3), on peut choisir λ de manière que ces deux quantités soient nulles. Nous pouvons donc, une telle valeur de λ étant choisie, écrire, en changeant de notations, les équations (1) et (2) sous la forme

$$x_{uu} + 2bx_v + c'x = 0, \quad x_{vv} + 2ax_u + c''x = 0. \tag{I}$$

Les coordonnées du point x obtenues par le choix du facteur de proportionnalité λ tel qu'il vient d'être fait sont appelées *coordonnées normales de Wilczynski*.

La surface (x) est le lieu du point x dont les coordonnées satisfont aux équations (I).

Les conditions d'intégrabilité du système (I) sont

$$\left.\begin{aligned} &a_{uu} + c''_u + 2ba_v + 4ab_v = 0, \\ &b_{vv} + c'_v + 2ab_u + 4ba_u = 0, \\ &c'_{vv} + 2ac'_u + 4a_uc' = c''_{uu} + 2bc''_v + 4b_vc''. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

2. *Le tétraèdre de E. Cartan.* — A chaque point x de la surface (x) nous attachons un tétraèdre qui a déjà été utilisé par Elie Cartan et que pour cette raison nous appelons tétraèdre de Cartan. Les sommets de ce tétraèdre sont les points

$$x, \; m = x\,(\log a)_u - 2x_u, \quad n = x\,(\log b)_v - 2x_u,$$

$$y = [8ab - (\log a)_u\,(\log b)_v]x + 2x_u\,(\log b)_v + 2x_v\,(\log a)_u - 4x_{uv}.$$

Un point de l'espace est représenté par

$$z^1x + z^2m + z^3n + z^4y$$

et nous dirons que z^1, z^2, z^3, z^4 sont les coordonnées locales de ce point.

En posant

$$h_1 = -(\log b)_{uv} + 4ab, \quad k_1 = -(\log a)_{uv} + 4ab,$$

$$\alpha = 2\,(\log a)_{uu} + (\log a)^2_u + 4(b_v + c'),$$

$$\beta = 2\,(\log b)_{uv} + (\log b)^2_v + 4(a_u + c''),$$

on a

$$\left.\begin{aligned}
2x_u &= x\,(\log a)_u - m, \quad 2x_v = x\,(\log b)_v - n,\\
2m_u &= \alpha x - m\,(\log a)_u - 4bm,\\
2m_v &= -\,2k_1 x + m\,(\log b)_v + y,\\
2n_u &= -\,2h_1 x + n\,(\log a)_u + y,\\
2n_v &= \beta x - 4am - n\,(\log b)_v,\\
2y_u &= -\,4b\beta x + 2h_1 m - \alpha n - y\,(\log a)_u,\\
2y_v &= -\,4a\alpha x - \beta m + 2k_1 n - y\,(\log b)_v.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

De ces relations, on déduit

$$\begin{aligned}
2z^1_u &= -\,z^1\,(\log a)_u - \alpha z^2 + 2h_1 z^3 + 4b\beta z^4,\\
2z^2_u &= z^1 + z^2\,(\log a)_u - 2h_1 z^4,\\
2z^3_u &= 4bz^2 - z^3\,(\log a)_u + \alpha z^4,\\
2z^4_u &= -\,z^3 + z^4\,(\log a)_u,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2z^1_v &= -\,z^1\,(\log b)_v + 2k_1 z^2 - \beta z^3 + 4a\alpha z^4,\\
2z^2_v &= -\,z^2\,(\log b)_v + 4az^3 + \beta z^4,\\
2z^3_v &= z^1 + z^3\,(\log b)_v - 2k_1 z^4,\\
2z^4_v &= -\,z^2 + z^4\,(\log b)_v.
\end{aligned}$$

3. *Le théorème de Bompiani-Tzitzeica.* — Aux droites de l'espace, nous faisons correspondre les points de l'hyperquadrique de Klein, située dans un espace S_5 à cinq dimensions. Rappelons que la condition pour que deux points p, q de S_5 soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q de Klein s'écrit

$$\Omega(p,q) = 0$$

de sorte que l'équation de cette hyperquadrique est $\Omega(p, p) = 0$.

Les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x) sont représentées sur Q par les points

$$U = |x \;\; x_u|, \quad V = |x \;\; x_v|$$

On a, en utilisant les équations (I),

$$\begin{aligned}
U_u &= |x \;\; x_{uu}| = -\,2b|x \;\; x_v|,\\
V_v &= |x \;\; x_{vv}| = -\,2a|x \;\; x_u|,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0. \tag{1}$$

Les points U, V sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre. Ce théorème a été obtenu à la même époque par Bompiani et par Tzitzeica.

4. *Suite de Laplace associée à la surface* (x). — Désignons par $U^1, U^2, \dots, U^n, \dots$ les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v et par $V^1, V^2, \dots, V^n, \dots$ ceux de V dans le sens des u. Nous avons

$$U^1 = U_v - U (\log b)_v, \quad V^1 = V_u - V (\log a)_u.$$

Plus généralement, nous avons

$$U^n = U^{n-1}_v - U^{n-1} (\log bh_1 \dots h_{n-1})_v, \; V^n =$$
$$V^{n-1}_u - V^{n-1} (\log ak_1 \dots k_{n-1})_u,$$

où l'on pose

$$h_n = -(\log bh_1 \dots h_{n-1})_{uv} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log ak_1 \dots k_{n-1})_{uv} + k_{n-1}.$$

Le point U^n satisfait à l'équation de Laplace

$$U^n_{uv} - U^n_u (\log bh_1 \dots h_n)_v - h_n U^n = 0$$

et le point V^n à l'équation

$$V^n_{uv} - V^n_v (\log ak_1 \dots k_n)_u - k_n V^n = 0.$$

Les invariants de l'équation de Laplace satisfaite par U^n sont h_n, h_{n+1} et ceux de l'équation vérifiée par V^n, k_n et k_{n+1}.

En particulier les invariants de l'équation de Laplace

$$U_{uv} - U_u (\log b)_v - 4abU = 0.$$

vérifiée par U sont $4ab$ et h_1 et ceux de l'équation de Laplace

$$V_{uv} - V_v (\log a)_u - 4abV = 0$$

vérifiée par V sont k_1 et $4ab$.

5. *Propriété de la suite de Laplace*. — Nous avons

$$\Omega(U, U) = 0, \; \Omega(V, V) = 0$$

et, les points de la droite UV représentant les tangentes à la surface (x) au point x, cette droite appartient à Q et l'on a

$$\Phi(U, V) = 0.$$

Ces relations étant bilinéaires par rapport à leurs arguments, en les dérivant par rapport à u, v et en tenant compte des expressions des transformés de Laplace de U, V, on trouve

$$\Omega(U, U^1) = 0, \Omega(U^1, V) = 0, \Omega(U, V^1) = 0, \Omega(V, V^1) = 0,$$
$$\Omega(U, V^2) = 0, \Omega(V, U^2) = 0, \Omega(U^1, V^1) = 0.$$

On en conclut que l'hyperplan tangent en U à l'hyperquadrique Q passe par les points U^1, U, V, V^1, V^2 et que l'hyperplan tangent en V à Q passe par les points V′, V, U, U^1, U^2.

On obtient de même, en dérivant deux fois la dernière relation écrite par rapport à u,

$$\Omega(U^1, V^2) = 0, \quad \Omega(U^1, V^3) = 0,$$

de sorte que l'hyperplan polaire de U^1 par rapport à Q est $UVV^1V^2V^3$. De même, l'hyperplan polaire de V^1 par rapport à Q est $VUU^1U^2U^3$.

Supposons que l'hyperplan polaire de U^{n-1} par rapport à Q passe par les points V^{n-3}, V^{n-2}, V^{n-1}, V^n, V^{n+1}, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Omega(U^{n-1}, V^{n-3}) = 0, \ \Omega(U^{n-1}, V^{n-2}) = 0, \ldots, \ \Omega(U^{n-1}, V^{n+1}) = 0.$$

En dérivant les quatre dernières relations par rapport à v, on obtient

$$\Omega(U^n, V^{n-2}) = 0, \ \Omega(U^n, V^{n-1}) = 0, \Omega(U^n, V^n) = 0, \Omega(U^n, V^{n+1}) = 0$$

et en dérivant la dernière de ces relations par rapport à u,

$$\Omega(U^n, V^{n+2}) = 0.$$

L'hyperplan polaire de U^n est donc $V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}V^{n+2}$.

On démontre de même que l'hyperplan polaire de V^n est $U^{n-2}U^{n-1}U^nU^{n+1}U^{n+2}$.

La suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

où chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le *sens des* u, *est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique* Q *de Klein. Les hyperplans polaires des points* U^n, V^n *sont respectivement*

$$V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}V^{n+2} \quad \text{et} \quad U^{n-2}U^{n-1}U^nU^{n+1}U^{n+2}.$$

Dans cet énoncé, U^0 doit être remplacé par U, U^{-1} et V^0 par V, ...

Les points U et V étant distincts, l'hyperplan polaire de U par exemple ne peut passer par U^2 ni celui de V par V^2. La suite L ne peut appartenir à un hyperplan.

6. *Points représentant les arêtes du tétraèdre de Cartan.* — On a

$$|x\ \ m| + 2U = 0, \quad |x\ \ n| + 2V = 0,$$
$$|x\ \ y| + 2(U^1 + V^1) = 0,$$
$$|m\ \ n| + 2(U^1 - V^1) = 0,$$
$$|m\ \ y| - 4V^2 - 4V^1 (\log ak_1)_u - 2\alpha V = 0,$$
$$|n\ \ y| - 4U^3 - 4U^1 (\log bh_1)_v - 2\beta U = 0.$$

Les points $U^1 + V^1$ et $U^1 - V^1$ appartiennent à l'hyperquadrique Q et sont les intersections de cette droite avec l'hyperquadrique Q. Cette droite U^1V^1 ne peut appartenir à Q, car U^1 par exemple appartiendrait à cette hyperquadrique et son hyperplan polaire $UVV^1V^2V^3$ serait tangent à Q en U^1. Mais alors le point U^1 coïnciderait avec U, ce qui est impossible.

La droite UU^1 touche Q en U et la droite VV^1 touche Q en V, mais ces droites ne peuvent appartenir à Q. Nous allons d'ailleurs déterminer les valeurs de $\Omega(U^1, U^1)$ et de $\Omega\,(V^1, V^1)$.

7. Posons

$$\Delta = \left| \, x \ x_u \ x_v \ x_{uv} \, \right| = -\frac{1}{16} \left| \, x \ m \ n \ y \, \right|.$$

Le déterminant Δ ne peut être nul, par hypothèse le point x n'étant pas parabolique.

En utilisant les équations (I), on trouve

$$\Delta_u = 0, \ \Delta_v = 0$$

et Δ est donc une constante.

Des relations établies plus haut, on déduit

$$4U^1 + |x\ y| + |m\ n| = 0.$$

Nous avons

$$16\Omega(U^1, U^1) + 8\Omega(U^1, |x\ y|) + 8\Omega(U^1, (mn|)$$
$$+ 2\Omega(|x\,y|, |m\ n|) = 0.$$

Des expressions de $|x\ y|$, $|m,\ n|$ établies plus haut, on déduit

$$\Omega(U^1, |xy|) + 2\Omega(U^1, U^1) = 0,$$

$$\Omega(U^1, |mn|) + 2\Omega(U^1, U^1) = 0$$

d'où

$$8\Omega(U^1, U^1) = \Omega(|x\,y|, |m\,n|).$$

On a

$$\Omega(|x\,y|, |m\ n|) = |x\ y\ m\ n| = |x\ m\ n\ y| = -16\Omega\Delta,$$

d'où

$$\Omega(U^1, U^1) = -2\Delta.$$

De

$$4V^1 = |x\ y| - |m\ n|,$$

on tire également

$$\Omega(V^1, V^1) = 2\Delta.$$

8. En dérivant la relation $\Omega(U, U^1) = 0$ par rapport à v, on obtient

$$\Omega[U^1 + U\ (\log b)_v,\ U^1] + \Omega[U,\ U^2 + U^1\ (\log bh_1)_v] = 0,$$

d'où

$$\Omega(U, U^2) = 2\Delta.$$

En dérivant la relation $\Omega(U^1, U^1) = -2\Delta$ par rapport à v, on a

$$\Omega[U^1,\ U^2 + U^1\ (\log\ bh_1)_v] = 0,$$

d'où

$$\Omega(U^1, U^2) = 2\Delta\ (\log\ bh_1)_v.$$

Le même procédé donne

$$\Omega(V, V^2) = -2\Delta,\ \Omega(V^1, V^2) = -2\Delta(\log\ ak_1)_u.$$

Pour calculer $\Omega(U^2, U^2)$, partons de la relation donnant $|n\ y|$. Nous avons successivement

$$\Omega(|ny|, |ny|) = 4\Omega(U^2, |ny|) + 4\Omega(U^1, |ny|)\ (\log bh_1)_v + 2\beta\Omega(U, |ny|),$$

$$\Omega(U^2, |ny|) - 4\Omega(U^2, U^2) - 8\varDelta\ (\log bh_1)^2 - 8\beta\varDelta = 0,$$

$$\Omega(U^1, |ny|) - 8\varDelta\ (\log bh_1)_v + 8\varDelta\ (\log bh_1)_v = 0,$$

$$\Omega(U, |ny|) - 8\varDelta = 0.$$

On en déduit

$$\Omega(U^2, U^2) = -2[\beta + (\log bh_1)_v^2]\varDelta.$$

On obtient de même

$$\Omega(V^2, V^2) = 2[\alpha + (\log ak_1)_u^2]\varDelta.$$

Entre U^3, U^2, U^1, U, V, V^1, V^2 il existe une relation linéaire

$$U^3 + \eta_2 U^2 + \eta_1 U^1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V^1 + \xi_2 V^2 = 0.$$

Pour calculer les coefficients, observons que l'on a en dérivant par rapport à v

$$\Omega(U^2, U^2),\ \Omega(U^1, U^2),\ \Omega(U, U^2),\ \Omega(V, U^2),\ \text{on a}$$

$$\Omega(U^3, U^2) + \Omega(U^2, U^2)\ (\log bh_1h_2)_v = -[\beta_v + 2\ (\log bh_1)_v\ (\log bh_1)_{vv}]\varDelta,$$

$$\Omega(U^2, U^2) + \Omega(U^1, U^2)\ (\log b^2h_1^2h_2)_v + \Omega(U^1, U^3) = 2\varDelta\ (\log bh_1)_{vv},$$

$$\Omega(U^1, U^2) + \Omega(U, U^2)\ (\log b^2h_1h_2)_v + \Omega(U, U^3) = 0,$$

$$-2a\Omega(U, U^2) + \Omega(V, U^3) = 0,$$

ce qui permet de calculer $\Omega(U^2, U^3)$, $\Omega(U^1, U^3)$, $\Omega(U, U^3)$, $\Omega(V, U^3)$. On a d'ailleurs $\Omega(V^1, U^3) = 0$, $\Omega(V^2, U^3) = 0$.

En partant de l'expression donnée de U^3, on calculera $\Omega(U^2, U^3)$, $\Omega(U^1, U^3)$, $\Omega(U, U^3)$, $\Omega(V, U^3)$, $\Omega(V^1, U^3)$, $\Omega(V^2, U^3)$, ce qui donnera six équations en η_0, η_1, η_2, ξ_0, ξ_1, ξ_2. Tout calculs faits, on trouve

$$2U^3 + 2U^2\ (\log b^3h^3h_2)_v + 2\beta_1 U^1 + \beta\ (\log b^2\beta)^1 U + 4a\,[\alpha V + V^1\ (\log ah_1)_u + V^2] = 0, \tag{1}$$

en posant

$$\beta_1 = \beta + (\log bh_1)_{vv} + (\log bh_1)_v \ (\log b^2 h_1)_v.$$

On aura de même

$$2V^3 + 2V^2 (\log a^3 k_1^2 k_2)_u + 2\alpha_1 V^1 + \alpha (\log a^2 \alpha)_u V$$
$$+ 4b[\beta U + U^1 (\log bh_1)_v + U^2] = 0, \qquad (2)$$

en posant

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)_{uu} + (\log ak_1)_u \ (\log a^2 k_1)_u.$$

En utilisant les conditions d'intégrabilité (II), on trouve

$$a\alpha_u + 2\alpha a_u = b\beta_v + 2\beta b_v.$$

De plus, on a

$$\alpha_v = -2k_1 (\log ak_1)_u, \ \beta_u = -2h_1 (\log bh_1)_v.$$

En utilisant ces relations, on passe de l'équation (1) à l'équation (2) en dérivant la première par rapport à u et inversement, on passe de la seconde à la première en la dérivant par rapport à v.

9. *Équations d'une droite représentée par un point de l'hyperquadrique* Q. — Un point G de S_5 peut être représenté par

$$G = \eta_2 U^2 + \eta_1 U^1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V^1 + \xi_2 V^2.$$

Pour que ce point appartienne à l'hyperquadrique Q, on doit avoir

$$\beta\eta_2^2 - [\eta_1 - \eta_2 (\log bh_1)_v]^2 - 2\eta_0\eta_2 - \alpha\xi_e^2 - [\xi_1 - \xi_2 (\log ak_1)_u]^2$$
$$+ 2\xi_0\xi_2 = 0. \qquad (3)$$

On peut considérer les quantités η_0, η_1, η_2, ξ_0, ξ_1, ξ_2 comme les coordonnées locales du point G et l'équation précédente est celle de l'hyperquadrique Q.

Le point G de Q représente une droite g commune aux quatre plans

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_2[z^1 (\log bh_1)_v + \beta z^3) - \eta_1 z^1 - 2\eta_0 z^3 + 2\xi_0 z^2 + \xi_1 z^1 \\
&\qquad\qquad - \xi_2 [z^1 (\log ak_1)_u + \alpha z^2] = 0, \\
&\eta_2[z^3 (\log bh_1)_v - z^1] - \eta_1 z^3 + 2\xi_0 z^4 - \xi_1 z^3 \\
&\qquad\qquad + \xi_2[z^3 (\log ak_1)_u - \alpha z^4] = 0, \\
&\eta_2[z^2 (\log bh_1)_v - \beta z^4) - \eta_1 z^2 + 2\eta_0 z^4 - \xi_1 z^2 \\
&\qquad\qquad + \xi_2[z^2 (\log ak_1)_u - z^1] = 0, \\
&\eta_2[z^2 + z^4 (\log bh_1)_v] - \eta_1 z^4 + \xi_1 z^4 - \xi_2[z^3 + z^4 (\log ak_1)_u] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

10. *Représentation d'une congruence de droites.* — Soit (g) une congruence de droites.

Désignons par G le point de Q qui représente la droite g. La congruence (g) a pour image une surface (G) tracée sur Q. Nous supposerons que la droite g et le point G dépendent des deux paramètres u, v.

Le plan tangent en G à la surface (G) est déterminé par les points G, G_u, G_v. La droite G_uG_v rencontre Q en deux points $\lambda G_u + \mu G_v$, λ et μ étant déterminés par l'équation

$$\lambda^2 \Omega(G_u, G_u) + 2\lambda\mu\Omega(G_u, G_v) + \mu^2\Omega(G_v, G_v) = 0.$$

Soient P_1, P_2 ces points et p_1, p_2 les droites GP_1, GP_2. Ces droites appartiennent à l'hyperquadrique Q.

Lorsque u, v varient, la droite p_1 reste tangente à une courbe π_1 tracée sur la surface (G). Les points de cette courbe représentent les droites d'une surface Π_1 appartenant à la congruence (g). Les tangentes à la courbe π_1 appartiennent à Q, donc la surface Π_1 est une développable dont nous désignerons l'arête de rebroussement par π_1'. La développable Π_1 contient la droite g homologue de G et le point de contact de cette droite avec π_1' est un foyer F_1 de la droite g.

La droite p_1 représente un faisceau de rayons de sommet F_1, dont le plan est le plan osculateur à la courbe π_1' en F_1. Il en résulte que le point F_1 sera déterminé par l'intersection de g avec la droite ayant pour image P_1.

De même, le second foyer F_2 de la droite g sera l'intersection de cette droite avec celle qui est représentée par le point P_2.

De ce qui précède, on conclut que l'équation différentielle des développables de la congruence (g) est

$$\Omega(G_u, G_u)du^2 + 2\Omega(G_u, G_v)du dv + \Omega(G_v, G_v)dv^2 = 0.$$

Observons que les plans focaux d'une droite g sont les plans des faisceaux de rayons correspondant aux droites GP_1, GP_2. Le premier est le plan tangent à la nappe focale (F_2), le second est le plan tangent à la nappe focale (F_1).

11. *Courbes* u, v *sur les surfaces* (U), (V). — Aux asymptotiques u, v de la surface (x) on peut associer quatre surfaces réglées.

1° La développable S_u lieu des tangentes à une courbe u.

Les droites de cette développable sont représentées par les points d'une courbe u de la surface (U).

2° La développable S_v lieu des tangentes à une courbe v. Cette développable est représentée par une courbe v de la surface (V).

3° La surface réglée R_u lieu des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u.

Aux droites de cette surface correspondent les points d'une courbe u tracée sur la surface (V).

4° La surface R_v lieu des tangentes aux courbes u aux points d'une courbe v.

Cette surface est représentée par une courbe v tracée sur la surface (U).

12. *La quadrique de Lie.* — Les plans UU^1U^2 et VV^1V^2 sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Le premier coupe Q suivant une conique γ touchant UU^1 en U, le second coupe Q suivant une conique γ' touchant VV^1 en V. Les points de la conique γ représentent les génératrices rectilignes d'une demi-quadrique et ceux de la conique γ' les génératrices rectilignes de la demi-quadrique complémentaire. La quadrique, support commun de ces deux demi-quadriques est la quadrique de Lie Φ.

Le plan UU^1U^2 est osculateur à la courbe v tracée sur la surface (U), c'est-à-dire que la demi-quadrique représentée par γ est osculatrice à la réglée R_v le long de la tangente à la courbe u homologue de U.

De même, la demi-quadrique représentée par γ' est osculatrice à la réglée R_u le long de la tangente à la surface (x) homologue de V. On retrouve ainsi la propriété de la quadrique Φ qui a servi de définition à Lie.

On obtient l'équation locale de la quadrique Φ en appliquant les formules du n° 9, en partant de

$$\beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2 (\log bh_1)_v]^2 - 2\eta_0\eta_2 = 0, \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0,$$

ou de

$$\alpha\xi_2^2 + [\xi_1 - \xi_2 (\log ak_1)_u]^2 + 2\xi_0\xi_2 = 0, \eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

On trouve l'équation

$$z^1z^4 + z^2z^3 = 0.$$

conique γ_n' en C^1. Donc, lorsque v varie, la droite c^1 engendre une réglée se raccordant à la quadrique Φ_{n-1} le long de c^1.

La droite $D^1D_v^1$ appartient au plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et est tangente en D^1 à la conique γ_n. Par suite, lorsque v varie, la droite d^1 engendre une réglée se raccordant à la quadrique Φ_n le long de d^1.

La droite $D^1D_u^1$ appartient au plan $U^{n+1}U^nU^{n-1}$ et touche la conique γ_n au point D^1. Par suite, lorsque u varie, la droite d^1 engendre une réglée se raccordant à la quadrique Φ_{n-1} le long de d^1.

On en conclut que les tangentes aux courbes u, v au point c^1d^1 à la surface (c^1d^1) engendrée par ce point se trouvent dans le plan tangent aux deux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. Le point c^1d^1 fait donc partie de l'enveloppe de ces deux quadriques.

A chaque point x *d'une surface* (x) *est attachée une suite de quadriques*

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_n,\ \ldots \tag{I}$$

dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite ont en commun les arêtes d'un quadrilatère gauche dont les sommets sont caractéristiques pour les deux quadriques.

Il importe de remarquer que les droites UU^1, VV^1 touchant Q respectivement en U et V, la surface (x) fait partie de l'enveloppe de la quadrique de Lie, qui ne possède donc en général que cinq points caractéristiques, le point x comptant pour quatre. En général, une quadrique Φ_n possède huit points caractéristiques.

16. *Une propriété des plans tangents aux surfaces* (C^1), (C^2), (D^1), (D^2). — Désignons par A le point de rencontre des droites $C^1C_v^1$ et $C^2C_v^2$, par B le point de rencontre des droites $D^1D_u^1$ et $D^2D_u^2$. Le point A appartient au plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ et le point B au plan $U^{n-1}U^nU^{n+1}$, ils sont donc conjugués par rapport à Q.

L'hyperplan polaire de A contient les points U^{n-1}, U^n, U^{n+1} et les points C^1, C^2, donc les points V^n, V^{n+1}. Celui de B contient les points V^{n-1}, V^n, V^{n+1} et D^1, D^2 donc les points U^n, U^{n+1}. Par conséquent, la droite AB est la conjuguée de l'espace à quatre dimensions $U^nU^{n+1}V^nV^{n+1}$ par rapport à Q.

Soient maintenant A′ le point de rencontre des droites $D^1D_v^1$ et $D^1D_v^1$, B′ celui des droites $C^1C_u^2$ et $C^2C_u^2$. Le point A′ appartient au plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et le point B′ au plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$, ils sont donc conjugués par rapport à Q. L'hyperplan polaire de A′ passe par les points V^n, V^{n+1}, V^{n+2}, D^1, D^2 donc par les points

U^n, U^{n+1}. De même, l'hyperplan polaire de B' passe par les points U^n, U^{n+1}, U^{n+2}, V^n, V^{n+1}. La conjuguée par rapport à Q de l'espace U^nU^{n+1} V^nV^{n+1} est donc la droite $A'B'$ qui coïncide donc avec la droite AB.

Les points A, B, A', B' sont donc en ligne droite et les plans tangents aux surfaces (C^1), (C^2), (D^1), (D^2) se coupent suivant cette droite.

Observons que les points de rencontre de la droite AB avec Q représentent les diagonales du quadrilatère gauche formé par les droites c^1, c^2, d^1, d^2. En effet, chacun de ces points est conjugué des points C^1, C^2, D^1, D^2 et les droites qu'ils représentent doivent donc rencontrer les quatre droites c^1, c^2, d^1, d^2, ce qui n'est possible que si ce sont les diagonales du quadrilatère.

17. *Conservation des asymptotiques* u, v *sur l'enveloppe commune aux quadriques* Φ_{n-1}, Φ_n. — Supposons que les asymptotiques de la surface (c^1d^1) soient les lignes u, v. Alors la droite C^1D^1 contient deux points $\bar{U}$, $\bar{V}$ images des tangentes aux courbes u, v en un point c^1d^1 à la surface (c^1d^1) et ces deux points sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Nous désignerons par $\bar{V}^1$ le transformé de Laplace de $\bar{V}$ dans le sens des u.

La tangente $C^1C^1_u$ à la courbe u de la surface (C^1) est l'intersections des plans $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et $\bar{U}\bar{V}\bar{V}^1$ tangents aux développables engendrées par les droites V^nV^{n+1} et $\bar{U}\bar{V}$ lorsque u varie.

Supposons que les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $\bar{V}\bar{V}^1$ ne se rencontrent pas et soit X le point de rencontre de la droite $C^1C^1_u$ avec $V^{n+1}V^{n+2}$, Y celui de la même droite avec $\bar{V}\bar{V}^1$. La tangente en X à la courbe v tracée sur la surface (X) se trouve dans le plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et coupe V^nV^{n+1} en un point X^1. La tangente en Y à la courbe v tracée sur la surface (Y) appartient au plan $\bar{U}\bar{V}\bar{V}^1$ et coupe $\bar{U}\bar{V}$ en un point Y^1. La droite $C^1C^1_u$ engendre une développable d'arête de rebroussement (C^1) et les droites XX^1 et YY^1 se trouvent dans le plan tangent $C^1C^1_uC^1_{uu}$ à cette développable. Ce plan contient C^1 et X^1, donc la droite V^nV^{n+1}, le point Y^1 donc les points $\bar{U}$, $\bar{V}$. Il contient en outre les points V^{n+2} et $\bar{V}^1$. Il en résulte que les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $\bar{V}\bar{V}^1$ sont dans un même plan et se coupent, contrairement à l'hypothèse. Les points X et Y coïncident en un point X.

Cela étant, la tangente en X à la courbe v tracée sur la surface (X) doit coïncider avec la droite $C^1C^1_u$ et les points C^1 et X

On a vu (n° 17) que la condition était nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, supposons que le point C^1 par exemple décrive un réseau conjugué (u, v).

Une courbe u tracée sur la surface (C^1) représente une surface réglée engendrée par des droites c^1 et que nous représenterons par $(c^1)_u$.

Par hypothèse, lorsque v varie, la droite $C^1C^1_u$ engendre une développable ayant pour plan tangent le long d'une de ses droites le plan tangent à la surface (C^1).

Considérons la développable engendrée par la droite $C^1C^1_u$ lorsque u varie. Il lui correspond une surface $(c_1)_u$ lieu des tangentes à la surface focale (c^1d^1) de la congruence (c^1) aux points c^1d^1 d'une courbe u tracée sur cette surface. Lorsque v varie, l'enveloppe de cette surface $(c^1)_u$ oscule la courbe v issue du point c^1d^1 considéré. Or, le plan tangent à la surface $(c^1)_u$ est le plan tangent au point c^1d^1 à la surface (c^1d^1). Le plan osculateur à la courbe coïncide donc avec le plan tangent à la surface (c^1d^1) et il en résulte que les courbes v sont des asymptotiques de la surface (c^1d^1). On démontre de même que les courbes u sont des asymptotiques de cette surface.

En vertu du résultat obtenu plus haut (n° 17), le théorème est démontré.

Observation. — Le théorème de Darboux invoqué plus haut (n° 17) dit que s'il y a conservation des asymptotiques u, v sur les nappes d'une congruence (congruences appelées congruences W), le point image de la droite génératrice de cette congruence décrit un réseau u, v, et réciproquement. Le raisonnement précédent constitue une démonstration géométrique de la réciproque.

20. *La congruence* (AB), — Plaçons-nous dans le cas $A' = A$, $B' = B$.

Comme nous l'avons vu, le plan osculateur à la courbe u du transformé de Laplace C^{11} du point C^1 dans le sens des v est le plan tangent en C^1 à la surface (C^1). Le point A_u appartient à ce plan. Pour la même raison, il appartient au plan tangent en C^2 à la surface (C^2). Il appartient donc à deux plans se rencontrant suivant la droite AB, dont il appartient à cette droite.

On démontre de même que le point B_v appartient à cette droite, par suite *les points* A, B *sont transformés de Laplace l'un de l'autre.*

Observons que le point A est commun aux plans $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ et $U^nU^{n+1}U^{n+2}$. Le point B est commun aux plans $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ et $V^nV^{n+1}V^{n+2}$.

Les points A et B sont consécutifs dans une suite de Laplace $\mathcal{A}$. Désignons par A^1, A^2, ..., A^n, ... les transformés successifs de Laplace de A dans le sens des v, par B^1, B^2, ..., B^n ; ... ceux de B dans le sens des u.

Si C^{11}, C^{21} sont les transformés de Laplace de C^1, C^2 dans le sens des v, le point A^1 est l'intersection des droites $C^{11}C^{11}_v$, $C^{21}C^{21}_v$ et appartient donc au plan $V^{n-2}V^{n-1}V^n$, puisque C^{11}, C^{21} appartiennent à la droite V^nV^{n-1}. D'autre part, si D^{12}, D^{22} sont les transformés de Laplace de D^1, D^2, dans le sens des v, le point A^1 appartient aux droites $D^{12}D^{12}_v$, $D^{22}D^{22}_v$ et par conséquent au plan $U^{n+1}U^{n+2}U^{n+3}$.

On démontre de même que le point B^1 appartient aux plans $U^{n-2}U^{n-1}U^n$ et $V^{n+1}V^{n+2}V^{n+3}$.

D'une manière générale, on vérifie aisément que :

Le point A^m appartient aux plans $V^{n-m-1}V^{n-m}V^{n+m+1}$ et $U^{n+m}U^{n+m+1}U^{n+m+2}$ et le point B^m aux plans $U^{n-m-1}U^{n-m}U^{n-m+1}$ et $V^{n+m}V^{n+m+1}V^{n+m+2}$.

Il doit être entendu que si $m = n + k$, le plan $V^{n-m+1}V^{n-m}V^{n-m+1}$ devient le plan $U^kU^{k-1}U^{k-2}$ et le plan $U^{n-m-1}U^{n-m}U^{n-m+1}$ le plan $V^kV^{k-1}V^{k-2}$.

Appelons polyèdre de Laplace à faces planes associé à la suite L l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs de la suite L.

La suite de Laplace $\mathcal{A}$ est doublement inscrite dans le polyèdre à faces planes de Laplace associé à la suite L.

Le plan VV^1V^2 contient les points A^{n+1}, B^{n+2}, le plan UVV^1 les points A^n et B^{n+1} ; le plan VUU^1 les points A^{n+1} et B^n, le plan UU^1U^2 les points A^{n+2} et B^{n-1}.

21. *Enveloppe des quadriques de Lie.* — Appliquons ce qui précède à l'étude de la partie de l'enveloppe des quadriques de Lie commune à l'enveloppe des quadriques Φ_1.

Actuellement les points C^1, C^2 sont les points de rencontre de la droite V^1V^2 avec Q et les points D^1, D^2 ceux de la droite U^1U^2. En posant

$$\alpha + \xi^2 = 0, \; \beta + \eta^2 = 0,$$

on a

$$C^1 = V^2 + V^1[\xi + (\log ak_1)_u],\ C^2 = V^2 + V^1[-\xi + (\log ak_1)_u],$$

$$D^1 = U^2 + U^1[\eta + (\log bh_1)_v],\ D^2 = U^2 + U^1[-\eta + (\log bh_1)_v].$$

D'après ce qui précède, la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques de l'enveloppe considérée soient les courbes u, v, c'est-à-dire pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur l'enveloppe des quadriques de Lie, est que l'un des points C^1, C^2, D^1, D^2 décrive un réseau conjugué (u, v). Il en est alors de même des autres points.

On a

$$C^1_x = (\xi_v + k_1)\ (V^1 + \xi V),$$

en utilisant la formule

$$\alpha_v = -2k_1\ (\log ak_1)_u,\ \xi\xi_v = k_1\ (\log ak_1)_u.$$

La droite $C^1C^1_v$ coupe donc la droite V^1V^2 au point $V^1 + \xi V$ et pour notre objet, il suffira de voir dans quelle condition la tangente en ce point à la ligne u passe par C^1. On a

$$(V^1 + \xi V)_u = V^2 + V^1[\xi + (\log ak_1)_u] + \xi\ (\log a\xi)_u V = C^1 + \xi V\ (\log a\xi)_u.$$

La condition cherchée est donc

$$(\log\ a\xi)_u = 0,$$

car dans le cas général où nous nous plaçons, α et ξ ne sont pas nuls.

La condition précédente peut être remplacée par $(\log a^2\alpha)_u = 0$ et comme on a

$$a\alpha_u + 2\alpha a_u = b\beta_v + 2\beta b_v,$$

elle peut également être remplacée par $(\log\ b^2\beta)_v = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie est que l'une ou l'autre des relations équivalentes

$$(\log a^2\alpha)_u = 0,\ (\log b^2\beta)_v = 0$$

soit vérifiée.

22. *La Congruence* (AB) *dans le cas* n $= 1$. — Nous nous occuperons de la congruence (AB) dans le cas $n = 1$ et sous l'hypothèse qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie.

Les droites $C^1C^1_v$, $C^2C^2_v$, c'est-à-dire les droites

$$\xi_0 - \xi\xi_1 + \xi[\xi + (\log ak_1)_u]\xi_2 = 0,$$
$$\xi_0 + \xi\xi_1 - \xi[-\xi + (\log ak_1)_u]\xi_2 = 0$$

se coupent au point $\alpha V + V^1 (\log ak_1)_u + V^2$ et nous poserons

$$A = 2a[\alpha V + V^1 (\log ak_1)_u + V^2].$$

On aura de même

$$B = 2b[\beta U + U^1 (\log bh_1)_v + U^2].$$

Un calcul simple montre que l'on a,

$$A_u + aB = 0, \quad B_v + bA = 0.$$

Les points A et B satisfont respectivement aux équations de Laplace

$$A_{uv} - A_u (\log a)_v - abA = 0,$$
$$B_{uv} - B_v (\log b)_u - abB = 0.$$

Observons que l'on a actuellement

$$U^3 + U^2 (\log b^3h_1^2h_2)_v + \beta_1 U^1 + 2a[\alpha V + V_1 (\log ak_1)_u + V^2],$$
$$V^3 + V^2 (\log a^3k_1^2k_2)u + \alpha_1 V^1 + ab[\beta U + U^1 (\log bh_1)_v + U^2],$$

de sorte que l'on peut écrire

$$A = -[U^3 + U^2 (\log b^3h_1^2h_2)_v + \beta_1 U^1],$$
$$B = -[V^3 + V^2 (\log a^3k_1^2k_2)_u + \alpha_2 V^1].$$

On a

$$A_1 = A_v - A (\log a)_v = 2a[-2a\alpha U - k_1 V (\log ak_1)_u + k_1 V^1],$$

$$B_1 = B_u - B (\log b)_u = 2b[-2b\beta V - h_1 U (\log bh_1)_v + h_1 U^1].$$

23. *Remarque*. — Les expressions

$$A = 2a[\alpha V + V^1 (\log ak_1)_u + V^2],$$
$$B = 2b[\beta U + U^1 (\log bh_1)_v + U^2]$$

ont été calculées qu'il y ait ou non conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie.

D'une manière analogue, en représentant par

$$\xi_1 V^1 + \xi_2 V^2 + \xi_3 V^3$$

un point du plan $V^1V^2V^3$, on trouve que le point B' a une expression

$$B' = [V^2 + V^1 (\log ak_1)_u] (\log a\xi)_u - V^3 - V^2 (\log a^3 k_1^2 k_2)_u - \alpha_1 V^1$$

et, en remplaçant V^3 par son expression en fonction de V^2, V^1, ..., U^2, on a

$$4a(B' - B) = A (\log a^2\alpha)_u.$$

On obtient de même

$$4b(A' - A) = B (\log b^2\beta)_v.$$

On retrouve ainsi la condition

$$(\log a^2\alpha)_u = (\log b^2\beta)_v = 0$$

pour que A' coïncide avec A et B' avec B.

24. *Remarque sur les asymptotiques de l'enveloppe commune aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n.* — Supposons que les asymptotiques des surfaces (c^1d^1), (c^1d^2), (c^2d^1), (c^2d^2) ne soient pas les courbes u, v. Soient C un des points C^1, C^2 et D un des points D^1, D^2, enfin c, d les droites correspondantes. Désignons par u', v' les asymptotiques de la surface (cd).

Sur la droite CD, il existe deux points U', V' représentant les tangentes aux courbes u', v' de la surface (cd). La tangente à la courbe u' tracée sur la surface (U') est la droite CD et la tangente à la courbe v' tracée sur la surface (V') est également la droite CD, les points U', V' étant transformés de Laplace l'un de l'autre.

Faisons varier u'. La droite CD engendre une développable dont l'arête de rebroussement est une courbe u' de (U'). Le plan tangent à cette développable le long de CD est $U'V'V'^1$, V'^1 étant le transformé de Laplace de V' dans le sens des u'. Il en résulte que les tangentes $CC_u{}'$ et $DD_u{}'$ aux courbes u' en C et D sont dans ce plan et se rencontrent en un point M.

De même, si U'^1 est le transformé de Laplace de U' dans le sens des v', les tangentes $CC_{v'}$, $DD_{v'}$ aux courbes v' en C et D sont dans le plan $U'V'U'^1$ et se coupent en un point N.

Les droites $CC_{u'}$, $CC_{v'}$ appartiennent au plan tangent à la surface (C) et ce plan passe par la droite *a* conjuguée de l'espace $U^1U^2V^1V^2$ par rapport à Q. Ces droites rencontrent donc le droite *a*.

De même, les droites $DD_{u'}$, $DD_{v'}$ rencontrent la droite *a*. Il en résulte que les points M, N appartiennent nécessairement à la droite *a*. Ce sont les points de rencontre de la droite *a* avec les plans $U'V'V'^1$ et $V'U'U'^1$. Ces plans sont conjugués par rapport à Q, donc les points M, N partagent harmoniquement le couple de points R_1, R_2 qui représentent les diagonales du quadrilatère gauche formé par les droites c^1, c^2, d^1, d^2.

25. *Conservation des asymptotiques sur les nappes focales d'une congruence engendrée par une droite commune aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n.* — Soit encore C un des points C^1, C^2. Supposons que les asymptotiques des nappes focales (cd^1), (cd^2) de la congruence (c^1) se correspondent. Soient *u'*, *v'* ces asymptotiques.

Les droites $CC_{u'}$, $D^1D^1_{u'}$ se coupent en un point M de la droite *a*. Les droites $CC_{u'}$, et $D^2D^2_{u'}$ se coupent en un point de la droite *a* qui ne peut être que M. De même, les droites $CC_{v'}$, $D^1D^1_{v'}$, $D^2D^2_{v'}$ se coupent en un point N de la droite *a*.

Lorsque *u'* varie, la droite U^1U^2 engendre une réglée qui est une développable car les tangentes aux courbes *u'* en D^1, D^2 se coupent en un point M. Le plan tangent à cette développable le long de U^1U^2 est U^1U^2M.

De même, lorsque *v'* varie, la droite U^1U^2 engendre une développable dont le plan tangent est U^1U^2N.

Cela étant, lorsque *u'* et *v'* varient, la droite U^1U^2 engendre une congruence ayant pour nappes focales les surfaces (U^1), (U^2). Les développables de cette congruence correspondent d'une part aux variables *u'*, *v'* et d'autre part aux variables *u*, *v* ; il en résulte que l'on a nécessairement $u' = u$, $v' = v$.

Si les asymptotiques se correspondent sur les nappes focales de la congruence engendrée par une des droites communes aux quadriques Φ_{n-1}. Φ_n, ces asymptotiques sont les courbes u, v.

26. *Équation de la quadrique Φ_1.* — Pour rechercher l'équation de la quadrique Φ_1, on peut chercher l'équation locale de la conique γ_1 par exemple et utiliser ensuite les équations (4) du n° 9. Les calculs sont très longs et nous utiliserons une autre méthode.

Nous avons défini deux nombres ξ, η par les équations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Les points C^1, C^2 de la droite V^1V^2 sont donnés par

$$C^1 = V^2 + V^1[\xi + (\log ak_1)_u], \; C^2 = V^2 + V^1[-\xi + (\log ak_1)_u]$$

et les points D^1, D^2 de la droite U^1U^2 par

$$D^1 = U^2 + U^1[\eta + (\log bh_1)_v], \; D^2 = U^2 + U^1[-\eta + (\log bh_1)_v].$$

Les droites c_1, c_2, c_1, c_2 ont respectivement pour équations

$$z^1 + \xi z^2 = 0, \; z^3 - \xi z^4 = 0, \qquad (c^1)$$

$$z^1 - \xi z^2 = 0, \; z^3 + \xi z^4 = 0, \qquad (c^2)$$

$$z^1 + \eta z^3 = 0, \; z^2 - \eta z^4 = 0, \qquad (d^1)$$

$$z^1 - \eta z^3 = 0, \; z^2 + \eta z^4 = 0. \qquad (d^2)$$

La quadrique Φ_1 passe par ces droites, donc elle appartient au faisceau déterminé par la quadrique dégénérée dans les plans c^1d^1 et c^2d^2 et par la quadrique dégénérée dans les plans c^1d^2 et c^2d^1. Un calcul simple montre que l'équation de la quadrique Φ_1 est de la forme

$$(z^1)^2 + \alpha(z^2)^2 + \beta(z^3)^2 + \alpha\beta(z^4)^2 + \varphi(z^1z^4 + z^2z^3) = 0. \qquad (1)$$

Pour déterminer φ, il suffira d'écrire que la quadrique contient une droite homologue d'un point de la conique γ_1.

Le plan $U^1U^2U^3$ a pour équations

$$\frac{\eta_0}{\beta\,(\log b^2\beta)_v} = \frac{\xi_0}{4a\alpha} = \frac{\xi_1}{4a\,(\log ak_1)_u} = \frac{\xi_2}{4a} = \lambda$$

et la conique γ_1 est découpée sur ce plan par la quadrique

$$\beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2\ (\log bh_1)_v]^2 - 2\lambda\eta_2\beta(\log b^2\beta)_v + 16a^2\alpha\lambda^2 = 0.$$

Nous prendrons un des points d'intersection de cette conique avec l'hyperplan

$$\eta_1 - \eta_2\ (\log bh_1)_v = 0.$$

Au moyen des formules (4) du n° 9, il correspond à ce point la droite d'équations

$$\eta_2 z^1 - 4a\lambda\alpha z^4 = 0, \quad \eta_2 z^2 - 4a\lambda z^3 = 0.$$

Écrivons que les valeurs de η_2 données par ces équations satisfont à l'équation

$$\beta\eta^2 - 2\lambda\eta_2\beta\ (\log\ b^2\beta)_v + 4a^2\alpha\lambda^2 = 0.$$

On trouve deux équations

$$2a\alpha\beta(z^4)^2 + 2a(z^1)^2 - \beta\ (\log\ b^2\beta)_v z^1 z^4 = 0,$$
$$2a\beta(z^3)^2 + 2a\alpha(z^2)^2 - \beta\ (\log\ b^2\beta)_v z^2 z^3 = 0$$

dont la somme donne l'équation (1) où $\varphi = -\dfrac{\beta\ (\log\ b^2\beta)_v}{2a}$, de sorte que l'équation de la quadrique Φ_1 est

$$2a[(z^1)^2 + \alpha(z^2)^2 + \beta(z^3)^2 + \alpha\beta(z^4)^2] - \beta\ (\log\ b^2\beta)_v(z^1z^4 + z^2z^3) = 0$$

Remarquons que l'on a également $\varphi = -\dfrac{\alpha\ (\log\ a^2\alpha)_u}{2b}$.

III. Surfaces associées a des suites de Laplace périodiques.

27. *Préliminaires.* — Supposons que la suite L associée à une surface (x) soit périodique, c'est-à-dire que le point U^m par exemple coïncide avec le point U. La suite L comprend alors m points distincts et nous dirons qu'elle a la période m. Le point U^{m-1} coïncide avec le point V, le point U^{m-2} avec le point V^1, et ainsi de suite. Chacun des points de la suite décrit nécessairement un réseau conjugué (u, v).

Nous commencerons par démontrer que m est nécessairement pair.

Supposons en effet que L ait la période $m = 2n + 1$. Alors les points U^{n-1}, U^n, U^{n+1} coïncident respectivement avec les points V^{n+1}, V^n, V^{n-1}. Le plan déterminé par les trois premiers points étant conjugué du plan déterminé par les trois derniers par rapports à Q, ces deux plans coïncident en un plan ρ appartenant à Q.

Le point $U^n = V^n$ est l'image d'une droite r. Si maintenant nous traçons une courbe sur (U^n), les tangentes à cette courbe appartenant toutes à Q, la courbe représente une développable

Observons que la relation $h_{2n+2} = 4ab$ pourrait être remplacée par

$$(\log b^{2n+2}h_1^{2n+1}h_2^{2n} \ldots h_{2n}^2 h_{2n+1})_{uv} = 0.$$

D'autre part, si l'on était parti des équations vérifiées par les points V et V^{2n+2}, on aurait obtenu les conditions

$$(\log abk_1k_2 \ldots k_{2n+1})_{uv} = 0, \quad k_{2n+2} = 4ab$$

équivalentes aux précédentes.

30. Les conditions précédentes peuvent être modifiées par un choix convenable des variables u, v.

Remplaçons les coordonnées curvilignes u, v par les coordonnées u', v' données par

$$u = \varphi(u'), \quad v = \psi(v').$$

On a, en indiquant par a', b', h_1', ..., h_{2n+1}' ce que deviennent a, b, h_1, ..., h_{2n+1},

$$a' = a\psi', \; b' = b\varphi', \; h_1' = h_1\varphi'\psi', \; \ldots, \; h_{2n+1}' = h_{2n+1}\varphi'\psi',$$

d'où

$$4a'b'h_1' \ldots h_{2n+1}' = 4abh_1 \ldots h_{2n+1}(\varphi'\psi')^{2n+1}.$$

Nous pouvons choisir les fonctions $\varphi(u')$, $\psi(v')$ de telle sorte que le premier membre soit égal à l'unité. Supposons cette opération faite et retournons à nos anciennes notations. Nous pouvons supposer u et v choisis de telle sorte que l'on a

$$4abh_1 \ldots h_{2n+1} = 1.$$

Les équations (3) donnent $\lambda_u = 0$, $\lambda_v = 0$ et λ *est une constante.*

31. Reprenons la relation

$$U^{2n+2} = \lambda U,$$

où λ est telle que $\lambda_u = 0$ et dérivons-la totalement par rapport à u. Nous obtenons

$$h_{2n+2}U^{2n+1} + 2b\lambda V = 0,$$

ou, en tenant compte de la valeur de h_{2n+2},

$$\lambda V + 2aU^{2n+1} = 0.$$

En dérivant de nouveau cette relation par rapport à u, on a

$$\lambda[V^1 + V (\log a)_u] + 2aU^{2n+1} (\log a)_u + h_{2n+1}U^{2n} = 0.$$

Observons que les points U^{n-i} et V^{n+i+1} coïncident, par conséquent les équations de Laplace auxquelles ils satisfont ont des invariants égaux et l'on a

$$h_{n-i+1} = k_{n+i+1}. \tag{5}$$

La relation précédente devient donc

$$\lambda V^1 + 2ak_1U^{2n} = 0.$$

En dérivant successivement cette relation par rapport à u, on obtient la formule

$$\lambda V^i + 2ak_1k_2 \dots k_iU^{2n-i+1} = 0, \tag{6}$$

où $i = 0, 1, \dots, 2n + 1$.

32. En partant de

$$V^{2n+2} = \mu V,$$

où l'on a

$$\mu_v = 0, \ (\log \mu)_u = (\log abk_1 \dots k_{2n+1})_u, \ k_{2.\imath+2} = 4ab,$$

on obtient de même, en dérivant par rapport à v,

$$\mu U + 2bV^{2n+1} = 0,$$

$$\mu U^1 + 2bh_1V^{2n} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu U^i + 2bh_1 \dots h^iV^{2n-i+1} = 0. \tag{7}$$

Observons d'ailleurs qu'en vertu de la relation (5) pour $i = -n, -n+1, \dots, n-1, n$, nous avons

$$4abk_1k_2 \dots k_{2n+1} = 4abh_{2n+1}h_{2n} \dots h_1 = 1,$$

donc μ *est une constante si* λ *est une constante.*

Les points V^{n+1} et U^n coïncident ; les équations (6) et (7) donnent

$$\lambda V^{n+1} + 2ak_1 \dots k_{u+1}U_n = 0,$$

$$\mu U^n + 2bh_1 \dots h_nV^{n+1} = 0.$$

On en déduit

$$\lambda\mu = 4abh_1 \dots h_nk_1 \dots k_{n+1}$$

En utilisant les formules données plus haut, on montre que le point y satisfait aux équations aux dérivées partielles

$$y_{uu} + y_u \left(\log \frac{a}{h_1}\right)_u + 2b \frac{h_1}{k_1} y_v +$$

$$\left[\frac{1}{2}(\log a)_{uu} + \frac{1}{2}(\log a)_u^2 - \frac{1}{2}(\log a)_u (\log h_1)_u + b \frac{h_1}{k_1}(\log b)_v\right] y = 0$$

$$y_{vv} + y_v \left(\log \frac{b}{k_1}\right)_v + 2a \frac{k_1}{h_1} y_u +$$

$$\left[\frac{1}{2}(\log b)_{vv} + \frac{1}{2}(\log b)_v^2 - \frac{1}{2}(\log b)_v (\log k_1)_v + a \frac{k_1}{h_1}(\log a)_u\right] y = 0.$$

35. *Couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie.* — Nous venons de voir que si la suite L a la période six, les surfaces (x), $(\bar{x}) = (y)$ ont mêmes quadriques de Lie. Réciproquement, supposons que deux surfaces (x), $(\bar{x})$ aient mêmes quadriques de Lie.

L'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) se compose de cette surface et de la surface $(\bar{x})$, par conséquent les droites U^1U^2, V^1V^2 doivent être tangentes à l'hyperquadrique Q. Comme les points U^1, V^1 ne peuvent appartenir à Q, les points de contact sont les points U^2, V^2 et la suite de Laplace attachée à la surface (x) a la période six.

Si la suite L *attachée à une surface* (x) *a la période six, il existe une seconde surface attachée à la même suite et ayant mêmes quadriques de Lie que la première. Réciproquement, si deux surfaces ont mêmes quadriques de Lie, elles sont attachées à une même suite* L *qui a la période six.*

37. *Propriétés des directrices de Wilczynski.* — Nous supposerons dans ce qui va suivre que les quantités h_1 et k_1 sont distinctes.

Les directrices de Wilczynski w_1, w_2 correspondent aux points

$$W^1 = U^1 + V^1, W^2 = U^1 - V^1.$$

Pour obtenir les paramètres des développables de la congruence (w_1), cherchons l'intersection du plan tangent à la surface (W^1) en W^1 avec l'hyperquadrique Q (nº 10). On a

$$W_u^1 = h_1 U + V_2, \ W_v^1 = k_1 V + U^2.$$

Les points U et V^2 étant conjugués et appartenant à Q, la droite UV^2 et le point W_u^1 appartiennent à Q. Il en est de même de la droite VU^2 et du point W_v^1. On en conclut que les variables u, v sont les paramètres des développables de la congruence (w_1). Les plans focaux de la droite w_1 sont donc les plans xym $(z^3 = 0)$ et xyn $(z^2 = 0)$.

Les points W_u^1, W_v^1 représentent des droites situées respectivement dans les plans

$$2h_1z^4 - z^1 = 0, \quad 2k_1z^4 - z^1 = 0$$

et les foyers de la droite w sont donc les points

$$p = 2h_1x + y, \quad q = 2k_1x + y.$$

On a

$$2(h_1 - k_1)p_u - p[h_1 (\log ah_1^2)_u + k_1 (\log a)_u] + 2h_1 (\log ah_1)_u q = 0,$$

$$2(k_1 - h_1)q_v - q[k_1 (\log bk_1^2)_v + h_1 (\log b)_v] + 2k_1 (\log bk_1)_v p = 0.$$

38. Nous avons

$$W_u^2 = h_1U - V^2, W_x^2 = k_1V - U^2.$$

et les paramètres des développables de la congruence (w_2) sont aussi les variables u, v. Les foyers de la droite w_2 sont découpés sur cette droite par les plans

$$2h_1z^1 + z^4 = 0, \quad 2k_1z^1 + z^4 = 0$$

et sont donc les points m, n.

Les plans focaux de la droite w_2 passent par les points

$$2h_1x - y, \ 2k_1x - y.$$

On a (n° 2)

$$2m_u + m \ (\log \ a)_u + 4bn = 0,$$

$$2n_v + n \ (\log \ b)_v + 4am = 0.$$

Observons que les droites w_1, w_2 sont conjuguées par rapport à la quadrique de Lie Φ. Les plans focaux de la droite w_2 sont les plans polaires par rapport à Φ des foyers de la droite w_1 et les foyers de la droite w_2 sont les pôles des plans focaux de la droite w_1.

39. Les points p, q d'une part, les points m, n d'autre part, déterminent des suites de Laplace respectivement

$$\ldots, p_i, \ldots, p_1, p, q, q_1, \ldots, q_i, \ldots, \tag{I}$$

$$\ldots, m_i, \ldots, m_1, m, n, n_1, \ldots, n_i, \ldots, \tag{II}$$

chaque point d'une de ces suites étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points m, n satisfont respectivement aux équations de Laplace

$$4m_{uv} + 2m_v (\log a)_u - 2m_u (\log b)_v -$$
$$[2k_1 + 8ab + (\log a)_u (\log b)_v]m = 0,$$
$$4n_{uv} + 2u_u (\log b)_u - 2u_v (\log a)_u -$$
$$[2h_1 + 8ab + (\log a)_u (\log b)_v]n = 0.$$

Le point m_1, transformé de Laplace de m dans le sens des v, est donné par

$$m_1 = m (\log h)_v - 2m_v = 2k_1x - y$$

et le point n_1, transformé de Laplace de n dans le sens des u, par

$$n_1 = n (\log a)_u - 2n_u = 2h_1x - y.$$

Les points m_1, n_1 appartiennent à la droite $w_1 = xy$. De plus, les quaternes (x, y, p, n), (x, y, q, m_1) sont harmoniques.

Puisque les points m_1, n_1 appartiennent à la droite pq, *la suite de Laplace* (II) *est doublement inscrite dans la suite de Laplace* (I).

Le point p_1 étant le transformé de Laplace de p dans le sens des v, la droite pp_1 contient les transformés de Laplace des points m_1, n_1 dans le même sens, c'est-à-dire les points m_2 et n. De même, la droite qq_1 passe par les points m et n_2.

D'une manière générale, la droite p_ip_{i+1} contient les points m_{i-1}, m_{i+2} et la droite q_iq_{i+1} les points n_{i-1}, n_{i+2}.

40. Posons

$$\bar{m} = m\sqrt{a}, \quad \bar{n} = n\sqrt{b}.$$

Les équations liant m, n, m_u, n_v deviennent

$$\bar{m}_u + 2\sqrt{ab}\bar{n} = 0, \quad \bar{n}_v + 2\sqrt{ab}\bar{m} = 0.$$

La congruence (w_2) *est donc une congruence de Goursat.*

Partons inversement d'une congruence de Goursat de foyers m, n tels que

$$m_u + \varphi n = 0, \quad n_v + \varphi m = 0,$$

où φ est une fonction de u, v.

Les points m, n satisfont aux équations de Laplace

$$m_{uv} - m_u (\log \varphi)_u - \varphi^2 m = 0, \; n_{uv} - n_v (\log \varphi)_v - \varphi^2 n = 0$$

et les transformés de Laplace de m dans le sens des v et de n dans le sens des u sont

$$m_1 = m_v - m (\log \varphi)_u, \; n_1 = n_u - n (\log \varphi)_v.$$

Supposons que les paramètres des développables de la congruence $(m_1 n_1)$ soient les variables u, v et soient p, q les foyers de cette droite. Les points doubles x, y de l'involution déterminée par les couples p, n_1 et q, m_1 décrivent des surfaces (x), (y) ayant mêmes quadriques de Lie.

41. Nous avons supposé que h_1, k_1 étaient distincts. Supposons maintenant $h_1 = k_1$, c'est-à-dire $(\log a)_{uv} = (\log b)_{uv}$.

Aux point W_u^1, W_v^1 correspondent respectivement les droites

$$z^3 = 0, \; z^1 - 2h_1 z^4 = 0 \; ; \; z^2 = 0, \; z^1 - 2h_1 z^4 = 0,$$

de sorte que les foyers de la droite w_1 coïncident en un point unique $p = 2h_1 x + y$. Par contre, cette droite a deux plans focaux $z^2 = 0$, $z^3 = 0$.

On a

$$2p_u + p (\log a)_u = 0, \; 2p_v + p (\log b)_v = 0,$$

de sorte que le point p est fixe lorsque u, v varient.

Aux points W_u^2, W_v^2 correspondent respectivement les droites

$$z^3 = 0, \; z^1 + 2h_1 z^4 = 0 \; ; \; z^2 = 0, \; z^1 + 2h_1 z^4 = 0.$$

et les plans focaux de cette droite sont confondus en un plan ϖ passant par mn et par le point $m_1 = 2h_1 x - y$.

Observons que l'on a

$$2(z^1 + 2h_1 z^4)_u + z^1 + 2h_1 z^4 = 0, \; 2(z^1 + 2h_1 z^4)_v + z^1 + 2h_1 z^4 = 0,$$

de sorte que le plan ϖ est fixe lorsque u, v varient.

Les points x, y partagent harmoniquement le couple p, m_1, par conséquent *les surfaces* (x), (y) *se correspondent dans une homologie harmonique de centre* p *et de plan* ϖ.

Les points m, n se correspondent dans une transformation de Laplace et on a

$$2m_u + m\,(\log a)_u + 4bn = 0,$$
$$2n_v + n\,(\log b)_v + 4am = 0.$$

Le transformé de Laplace de m dans le sens des v est encore $m_1 = 2h_1x - y$, mais actuellement le transformé de Laplace de m_1 dans le sens des v est le point n, car on a

$$2(m_1)_v + m_1\,(\log b)_v + 2h_1n = 0.$$

Les points m, n, m_1 forment donc une suite de Laplace de période trois dans le plan ϖ.

Nous avons vu que les plans focaux de la droite w_1 sont $z^2 = 0$, $z^3 = 0$. On a

$$2z_u^3 + z^3\,(\log a)_u + 4bz^2 = 0,$$
$$2z_v^2 + z^2\,(\log b)_v + 4az^3 = 0,$$
$$2z_v^3 - z^3\,(\log b)_v = z^1 - 2h_1z^4,$$
$$2z_u^2 - z^2\,(\log a)_u = z^1 - 2h_1z^4,$$

de sorte que les plans $z^3 = 0$, $z^2 = 0$, ϖ sont les éléments d'une suite de Laplace de période trois dans la gerbe de droites de sommet p.

42. *Surfaces associées à une suite de Laplace de période huit.* — Supposons que la suite L ait la période huit ($n = 3$). Les points U^3 et V^3 appartiennent alors à l'hyperquadrique Q.

Rappelons que tout point G de l'espace S_5 peut être représenté par

$$G = \xi_2V^2 + \xi_1V^1 + \xi_0V + \eta_0U + \eta_1U^1 + \eta_2U^2,$$

les quantités ξ_2, ξ_1, ξ_0, η_0, η_1, η_2 étant les coordonnées locales du point.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point G appartienne à l'hyperquadrique Q est (n° 9),

$$\beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2\,(\log bh_1)]^2 - 2\eta_0\eta_2 - \alpha\xi_2^2 - [\xi_1 - \xi_2\,(\log ak_1)_u]^2 + 2\xi_0\xi_2 = 0.$$

Dans le cours de ce paragraphe, nous poserons pour abréger, $H = (\log bh_1)_v$, $H_2 = (\log b^3h_1^2h_2)_v$, $K = (\log ak_1)_u$, $K_2 = (\log a^3k_1^2k_2)_u$,

$$\theta = \frac{\beta}{2a} (\log\ b^2\beta)_v = \frac{\alpha}{2b} (\log\ a^2\alpha)_u.$$

Les coordonnées des points U^3 et V^3 sont respectivement

$$\eta_2 = H_2,\ \eta_1 = \beta_1,\ \eta_0 = a\theta,\ \xi_0 = 2a\alpha,\ \xi_1 = 2a_1K,\ \xi_2 = 2a, \qquad (U^3)$$

$$\xi_2 = K_2,\ \xi_1 = \alpha_1,\ \xi_0 = b\theta,\ \eta_0 = 2b\beta,\ \eta_1 = 2bH,\ \eta_2 = 2b. \qquad (V^3)$$

Pour que le point U^3 appartienne à Q, on doit avoir

$$(\beta_1 - HH_2)^2 + H_2(H_2\beta - 2a\theta) + 4a^2\alpha = 0, \tag{1}$$

et pour que le point V^3 appartienne à Q,

$$(\alpha_1 - KK_2)^2 + K_2(K_2\alpha - 2b\theta) + 4b^2\beta = 0. \tag{2}$$

43. Supposons la relation (1) satisfaite. Au point U^3 correspond une droite commune aux plans (nº 9)

$$\begin{aligned}
&(\beta_1 - HH_2)z^1 - 2a\alpha z^2 + (2a\theta - \beta H_2)z^3 = 0,\\
&2az^1 + (\beta_1 - HH_2)z^2 - (2a\theta - \beta H_2)z^4 = 0,\\
&\left.\begin{aligned}&H_2z^1 + (\beta_1 - HH_2)z^3 - 2a\alpha z^4 = 0,\\ &H_2z^2 - 2az^3 - (\beta_1 - HH_2)z^4 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (3)
\end{aligned}$$

Si l'on écrit que trois de ces plans passent par une même droite, on retrouve l'équation (1). Nous considérons que la droite homologue de U^3 est l'intersection des deux derniers (3) des plans précédents.

Si la relation (2) est satisfaite, il correspond au point V^3 une droite commune aux quatre plans

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 - KK_2)z^1 + (2b\theta - \alpha K_2)z^2 - 2b\beta z^3 = 0,\\
&2bz^1 + (\alpha_1 - KK_2)z^3 - (2b\theta - \alpha K_2)z^4 = 0,\\
&\left.\begin{aligned}&K_2z^1 + (\alpha_1 - KK_2)z^2 - 2b\beta z^4 = 0,\\ &-2bz^2 + K_2z^3 - (\alpha_1 - KK_2)z^4 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

Nous considérerons la droite correspondant à V^3 comme intersection des deux derniers (4) des plans précédents.

44. Les droites (3) et (4) doivent se rencontrer au point $\bar{x}$.

Pour que les droites (3) et (4) se rencontrent, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} H_2 & 0 & \beta_1 - HH_2 & 2a\alpha \\ 0 & H_2 & -2a & \beta_1 - HH_2 \\ K_2 & \alpha_1 - KK_2 & 0 & 2b\beta \\ 0 & -2b & K_2 & \alpha_1 - KK_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est une conséquence des équations (1) et (2).

Il en résulte que les coordonnées locales du point $\bar{x}$ sont

$$\rho z^1 = (\alpha_1 - KK_2)(\beta_1 - HH_2) + 2a\alpha K_2 + 2b\beta H_2 - 4ab\theta,$$

$$\rho z^2 = 2a(\alpha_1 - KK_2) + K_2(\beta_1 - HH_2),$$

$$\rho z^3 = 2b(\beta_1 - HH_2) + H_2(\alpha_1 - KK_2),$$

$$\rho z^4 = 4ab - H_2K_2.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\bar{x} = [(\alpha_1 - KK_2)(\beta_1 - HH_2) + 2a\alpha K_2 + 2b\beta H_2 - 4ab\theta]x$$
$$+ (\alpha_1 - KK_2)(2am + H_2 n) + (\beta_1 - HH_2)(2bn + K_2 m) +$$
$$(4ab - H_2K_2)y.$$

Remarquons que les surfaces (x) et $(\bar{x})$ ont mêmes tétraèdres de Demoulin.

45. *Remarque.* — La détermination de la surface $(\bar{x})$ lorsque $n > 3$ pourrait sans doute se faire par le procédé employé dans le cas $n = 3$, mais il faudrait exprimer U^n et V^n en fonction des points U^2, U^1, U, V, V^1, V^2, ce qui conduit à fes calculs longs et fastidieux. L'étude de la correspondance qui existe entre les gerbes de rayons de sommets x et $\bar{x}$ permettrait peut-être d'avancer vers la solution de ce problème.

Ajoutons que dans une thèse de doctorat, restée inédite, présentée à la Faculté des Sciences de Liége en 1957, M. Carton a établi par d'autres procédés que ceux utilisés ici, l'existence de surfaces (x) et $(\bar{x})$ associées à une suite L de période paire.

IV. Surfaces associées a une suite de Laplace terminée.

46. *Remarque préliminaire.* — Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que la suite de Laplace L était illimitée dans les deux sens. Cette suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Pour établir ce fait, nous avons dérivé par rapport à u et à v des équations telles que $\Omega(p, q) = 0$ indiquant que les points p, q sont conjugués par rapport à Q. Nous allons dorénavant considérer des suites L terminées. Cette suite est encore autopolaire par rapport à Q et il convient de préciser ce point.

Supposons pour fixer les idées que le point U^n ne dépende que de v et décrive par conséquent une courbe (U^n). Le point U^n est conjugué des points V^n et V^{n-1}. En dérivant

$$\Omega(U^n, V^n) = 0$$

par rapport à v, on obtient

$$\Omega(U^n_v, V^n) = 0$$

et le point U^n_v, qui n'est pas le transformé de Laplace de U^n, est conjugué de V^n.

47. *Théorème de Bompiani. — Si la suite de Laplace* L *s'arrête au point* U^n *en présentant le cas de Laplace, elle s'arrête en général au point* V^{n+2} *en présentant le cas de Goursat.*

Supposons que la suite L s'arrête au point U^n en présentant le cas de Laplace, c'est-à-dire que les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (U^{n-1}) forment un cône de sommet U^n. Le point U^n ne dépend que de v et nous nous placerons dans le cas général en supposant que la courbe (U^n) n'appartient pas à un hyperplan. On a $h_n = 0$, condition nécessaire et suffisante pour que U^n ne dépende que de v.

Le pôle V^{n+2} de l'hyperplan $U^nU^n_vU^n_{vv}U^n_{vvv}U^n_{vvvv}$ dépend seulement de v et décrit une courbe (V^{n+2}).

Le pôle V^{n+1} de l'hyperplan $U^{n-1}U^nU^n_vU^n_{vv}U^n_{vvv}$ dépend de u et de v ; il appartient à une droite r dépendant de v, conjuguée de l'espace à trois dimensions $U^nU^n_vU^n_{vv}U^n_{vvv}$ osculateur à la courbe (U^n).

On a d'autre part

$$V^{n+2} = k_{n+2} V^{n+1},$$

donc la droite r est tangente à la courbe (V^{n+2}). Lorsque v est fixe et que u varie, le point V^{n+1} décrit la droite r correspondant à cette valeur de v. La suite L se termine au point V^{n+2} en présentant le cas de Goursat.

Réciproquement, supposons que la suite L se termine au point V^{n+2} en présentant le cas de Goursat. Lorsque v est fixe et que u varie, le point V^{n+1} décrit la tangente r à la courbe (V^{n+2}) au point V^{n+2}.

Donnons à v une valeur fixe v_0 et considérons la courbe u correspondante sur la surface (V^n). Les tangentes à cette courbe rencontrent la droite r, donc cette courbe est située dans un plan ρ passant par r.

Les tangentes à la courbe u donnée par $v = v_0$ sur la surface (V^{n-1}) rencontrent le plan ρ, donc cette courbe est située dans un espace à trois dimensions R passant par ρ.

Les tangentes à la courbe u donnée par $v = v_0$ sur la surface (V^{n-2}) rencontrent l'espace R et cette courbe est par conséquent située dans un hyperplan passant par R. Le pôle de cet hyperplan est un point U^n qui ne dépend que de v_0, c'est-à-dire de v.

Cela étant, considérons sur la surface (U^{n-1}) la courbe u donnée par $v = v_0$. Le point U^n, transformé de Laplace de U^{n-1} dans le sens des v, est fixe et les tangentes aux points U^{n-1} de la courbe u considérée forment un cône de sommet U^n. La suite L se termine donc au point U^n en présentant le cas de Laplace.

Observons que dans la polarité par rapport à Q, les tangentes à la courbe (U^n) sont les conjuguées des espaces R, les plans osculateurs à cette courbe les conjugués des plans ρ et les espaces à trois dimensions osculateurs à (U^n) les conjugués des droites r. Les hyperplans osculateurs à (U^n) sont les hyperplans polaires des points de la courbe (V^{n+2}). Ils varient avec v.

Le théorème de M. Bompiani est ainsi démontré dans le cas où la courbe (U^n) n'est pas située dans un hyperplan.

48. *Premier cas particulier.* — Nous avons supposé que le point U^n variable avec v et que la courbe (U^n) n'appartenait pas à un hyperplan. Il convient d'examiner les cas où la courbe (U^n) appartient à un hyperplan, ou à un espace à trois dimensions, ou à un plan, ou à une droite, ou le cas où U^n est fixe.

Le premier cas particulier, celui où la courbe (U^n) appartient à un hyperplan, se traite sans difficulté. Le pôle V^{n+2}, pôle de l'hyperplan Σ contenant la courbe (U^n), est fixe, mais les droites r, conjuguées des espaces à trois dimensions osculateurs à la courbe (U^n), dépendent de v. La surface (V^{n+1}), au lieu d'être une développable d'arête de rebroussement (V^{n+2}), est un cône de sommet V^{n+2}. La suite L s'arrête encore au point V^{n+2} dans le sens des u mais en présentant un cas particulier du cas de Goursat, appelé cas mixte.

La réciproque s'établit de la même manière que dans le cas général.

Si la suite L *se termine au point* U^n *dans le sens des* v *en présentant le cas de Laplace et si la courbe* (U^n) *appartient à un hyperplan, cette suite se termine dans le sens des* u *au point* V^{n+2}, *qui est fixe, en présentant le cas mixte.*

49. *Deuxième cas particulier.* — Supposons maintenant que la courbe (U^n) appartienne à un espace à trois dimensions R'. Le pôle d'un hyperplan passant par R' est un point V^{n+1} qui appartient à la droite r conjuguée de cet espace R' par rapport à Q, droite qui est fixe.

Démontrons tout d'abord qu'un hyperplan passant par R' ne peut couper la surface (U^{n-1}) suivant une courbe u. En effet, s'il en était autrement, soit v_0 la valeur de v qui donne la courbe u et Σ l'hyperplan qui la contient et qui passe par R'. Les tangentes à la courbe u appartiennent à Σ donc également les points U^{n-2} homologues des points U^{n-1} de la courbe u envisagée, donnée par $v = v_0$. L'hyperplan Σ coupe donc la surface (U^{n-2}) suivant une courbe u donnée par $v = v_0$. Le même raisonnement montre que les courbes u données par $v = v_0$ sur les surfaces (U^{n-2}), (U^{n-3}), ... se trouvent dans Σ. Mais alors les hyperplans $U^n_{vvv}U^n_{vv}U^n_vU^nU^{n-1}$, $U^n_{vv}U^n_vU^nU^{n-1}U^{n-2}$, $U^n_vU^nU^{n-1}U^{n-2}U^{n-3}$, ... auraient pour pôles un même point V^{n+1} et les points V^{n+1}, V^n, V^{n-1}, ... coïncideraient, ce qui est absurde. Il en résulte que sur la droite r, le point V^{n+1} varie avec u.

Donnons à u une valeur u_0. A cette valeur correspond sur r un point V^{n+1} bien déterminé et sur la surface (V^n) une courbe v. Les tangentes aux courbes u aux points de cette courbe v doivent passer par le point V^{n+1} et forment par conséquent un cône.

La suite L se termine dans le sens des u aux points V^{n+1} en présentant le cas de Laplace.

Si la suite L *se termine au point* U^n *en présentant le cas de Laplace et si la courbe* (U^n) *appartient à un espace à trois dimensions, cette suite se termine dans le sens des* u *au point* V^{n+1} *en présentant le cas de Laplace, le lieu du point* V^{n+1} *étant la droite conjuguée de l'espace contenant* (U^n) *par rapport à l'hyperquadrique* Q.

50. Supposons que réciproquement la suite L se termine au point V^{n+1} en présentant le cas de Laplace, le lieu du point V^{n+1} étant une droite r lorsque u varie.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour démontrer le théorème de Bompiani (nº 47) montre que sur la surface (V^n) une courbe u est dans un plan ρ passant par r ; sur la surface (V^{n-1}) la courbe u homologue se trouve dans un espace R à trois dimensions passant par ρ ; sur la surface (V^{n-2}) la courbe u homologue sera dans un hyperplan passant par R. Le pôle de cet hyperplan $V_u^{n+1}V^{n+1}V^nV^{n-1}V^{n-2}$ est un point U^n qui ne dépend que de v et est situé dans l'espace à trois dimensions R′ conjugué de la droite r par rapport à Q.

Considérons sur la surface (U^{n-1}) une courbe u donnée par $v = v_0$. A cette valeur v_0 correspond sur la courbe (U^n) un point bien déterminé. Les tangentes aux courbes v aux points de la courbe u considérée sur (U^{n-1}) doivent passer par ce point U^n et par conséquent forment un cône. La suite L s'arrête au point U^n en présentant le cas de Laplace.

Observons qu'à l'espace R correspond, dans la polarité par rapport à Q, une tangente à la courbe (U^n), à un plan ρ, un plan ρ' osculateur à la courbe (U^n), variable avec v. Par suite la courbe (U^n) ne peut être plane et appartient à l'espace à trois dimensions conjugué de la droite r.

Si la suite L *s'arrête au point* V^{n+1} *dans le sens des* u *en présentant le cas de Laplace et si le lieu de ce point est une droite, cette suite s'arrête au point* U^n, *dans le sens des* v, *en présentant le cas de Laplace et la courbe* (U^n) *est située dans l'espace à trois dimensions conjugué de la droite* (V^{n+1}) *par rapport à* Q.

51. *Troisième cas particulier.* — Nous supposerons actuelle-

ment que la courbe (U^n) appartient à un plan ρ'. Nous désignerons par ρ le plan conjugué de ρ' par rapport à l'hyperquadrique Q.

Le pôle de l'hyperplan $U^n_{vv}U^n_vU^nU^{n-1}U^{n-2}$ est un point V^n appartenant au plan ρ. Cet hyperplan ne peut découper sur la surface (U^{n-1}) une courbe u car alors les courbes u correspondantes sur les surfaces (U^{n-2}), (U^{n-3}), ... appartiendraient également à cet hyperplan et les points V^{n+1}, V^{n+2}, ... coïncideraient avec V^n, ce qui est absurde. Il en résulte que le point V^n dépend effectivement de u et décrit dans le plan ρ une courbe (V^n).

Les tangentes à une courbe u tracée sur la surface (V^{n-1}) rencontrent le plan ρ, donc cette courbe u se trouve dans un espace R à trois dimensions passant par ρ. La courbe u homologue de la précédente sur la surface (V^{n-2}) appartient à un hyperplan passant par R.

Le même raisonnement prouve qu'une courbe v de la surface (U^{n-1}) est située dans un espace à trois dimensions R' passant par ρ' et que la courbe v homologue sur la surface (U^{n-2}) se trouve dans un hyperplan passant par R'.

Considérons sur la surface (V^{n-1}) une courbe v donnée par $u = u_0$. Pour cette valeur de u, le point V^n est bien déterminé et les tangentes à la courbe v considérées doivent passer par ce point V^n. Elle forment donc un cône et la suite L se termine dans le sens des u au point V^n en présentant le cas de Laplace.

Les conjuguées des espaces R' sont les tangentes à la courbe (V^n) et varient avec u. La courbe (V^n) ne peut donc se réduire à une droite.

Si la suite L *se termine au point* U^n *dans le sens des* v *en présentant le cas de Laplace et si la courbe* (U^n) *est plane, cette suite d'arrête au point* V^n *dans le sens des* u *en présentant également le cas de Laplace et la courbe* (V^n) *appartient au plan conjugué de celui de la courbe* (U^n) *par rapport à* Q.

Remarquons que dans le cas étudié ici, la quadrique Φ_n est fixe.

52. *Autres cas particuliers.* — Il nous reste à examiner les cas où le point U^n décrit une droite ou est fixe.

Le premier de ces cas a déjà été examiné, aux notations près (nº 50). On peut l'énoncer sous la forme suivante :

Si la suite L *se termine dans le sens des* v *au point* U^n *en présen-*

tant le cas de Laplace et si le point U^n *décrit une droite, la suite* L *se termine dans le sens des* u *en présentant également le cas de Laplace au point* V^n *et la courbe* (V^n) *appartient à l'espace à trois dimensions conjugué par rapport à* Q *de la droite lieu du point* U^n.

Lorsque le point U^n est fixe, le pôle V^{n-2} de l'hyperplan $U^nU^{n-1}U^{n-2}U^{n-3}U^{n-4}$ par rapport à Q appartient à l'hyperplan polaire Σ de U^n. Si le point V^{n-2} décrivait une surface, les tangentes aux courbes v en un point d'une courbe u appartiendraient à Σ de même que les points V^{n-3}. Pour la même raison, les points V^{n-4} appartiendraient à Σ et ainsi de suite. Mais alors, la suite L appartiendrait à Σ ce qui est absurde. Le point V^{n-2} ne dépend donc que de u et on retrouve le premier cas étudié plus haut (nº 48) sauf interversion des variables u, v et la substitution de $n-2$ à n.

Observons que la surface (U^{n-1}) est un cône de sommet U^n.

53. Théorème. *Dans le cas général, les points de rencontre de la droite* $V^{n+1}V^{n+2}$ *avec l'hyperquadrique* Q *ne dépendent que de* v.

Reprenons la surface (x) associée à une suite de Laplace L se terminant au point U^n en présentant le cas de Laplace, la courbe (U^n) n'appartenant pas à un hyperplan. Désignons par G^1, G^2 les points de rencontre avec Q de la droite $V^{n+1}V^{n+2}$.

Le conjugué de la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ par rapport à Q est l'espace à trois dimensions $U^nU^n_vU^n_{vv}U^n_{vvv}$ osculateur à la courbe (U^n). L'hyperplan polaire de G^1, hyperplan qui est tangent à Q en G^1, passera par l'espace à trois dimensions précédent. Nous aurons donc

$$\Omega(G^1, U^n) = 0,\ \ \Omega(G^1, U^n_v) = 0,\ \ \Omega(G^1, U^n_{vv}) = 0,$$
$$\Omega(G', U^n_{vvv}) = 0,\ \ \Omega(G^1, G^1) = 0.$$

En dérivant les relations précédentes par rapport à u, on a

$$\Omega(G^1_u, U^n) = 0,\ \ \Omega(G^1_u, U^n) = 0,\ \ \Omega(G^1_u, U^n_{vv}) = 0,$$
$$\Omega(G^1_u, U^n_{vvv}) = 0,\ \ \Omega(G^1_u, G^1) = 0$$

et par suite l'hyperplan polaire de G^1_u passe par les points U^n, U^n_v, U^n_{vv}, U^n_{vvv}, G^1 et coïncide avec l'hyperplan polaire de G^1. Les points G^1 et G_u coïncident, donc le point G^1 ne dépend que de v. Il en est de même du point G^2.

54. Ce théorème qui vient d'être établi est encore valable si la courbe (U^n) appartient à un hyperplan, car le raisonnement précédent fait simplement appel aux espaces à trois dimensions osculateurs à la courbe (U^n), espaces variables avec v.

Le théorème n'a plus d'intérêt si la courbe (U^n) appartient à un espace à trois dimensions R'. Alors en effet, le point V^{n+2} n'existe plus. Le point V^{n+1} dépend de u et décrit une droite fixe r, conjuguée de R' par rapport à Q. Les points d'intersection de r avec Q sont fixes.

Lorsque la courbe (U^n) appartient à un plan ρ', la courbe (V^n) appartient à un plan ρ conjugué de ρ' par rapport à Q. Comme nous l'avons vu, la quadrique Φ_n est fixe.

Notons en passant que si G est un des points d'intersection de la droite U^nV^n avec Q, les courbes u sur la surface (G) sont découpées par les cônes projetant des points U^n la courbe (V^n) et les courbes v, par les cônes projetant des points V^n la courbe (U^n).

55. *Surfaces réglées gauches.* — Supposons que la surface (x) soit une réglée gauche dont les asymptotiques u sont les génératrices rectilignes. Les points U ne dépendent que de v et la suite L s'arrête au point U. On a d'ailleurs $b = 0$.

Une courbe u tracée sur la surface (V) représente les tangentes aux courbes v aux différents points d'une génératrice u. Les tangentes aux courbes v le long d'une courbe u de (V) forment donc un cône dont le sommet est un point U. La suite L s'arrête donc au point U en présentant le cas de Laplace.

Plaçons-nous dans le cas où la courbe (U) n'appartient pas à un hyperplan. La suite L s'arrête alors au point V^2 en présentant le cas de Goursat, dans le sens des u.

Les hyperplans osculateurs à la courbe (U) sont les hyperplans polaires des points V^2 ; ils représentent les complexes linéaires osculateurs à la réglée (x) le long d'une génératrice u, c'est-à-dire les complexes déterminés par une génératrice u et les quatre génératrices u infiniment voisines successives de la première.

Un espace linéaire à trois dimensions osculateur à la courbe (U) représente une congruence linéaire déterminée par une génératrice u et les trois génératrices infiniment voisines successives. Comme cet espace a pour conjuguée par rapport à Q une droite V^1V^2, les directrices de la congruence sont représenstée par les points d'intersection G^1, G^2 de V^1V^2 avec Q. Par suite, les droites

g^1, g^2 correspondant aux points G^1, G^2 sont les droites inflexionnelles de la surface (x).

Les points de rencontre de la droite V^1V^2 *avec* Q *représentent les tangentes inflexionnelles de la surface* (x).

Ce résultat subsiste lorsque la courbe (U) appartient à un hyperplan, mais celui-ci représente un complexe linéaire auquel la surface (x) appartient.

56. Lorsque la courbe (U) appartient à un espace linéaire à trois dimensions R', la suite L s'arrête au point V^1 en présentant le cas de Laplace.

La surface (x) est une réglée qui appartient à la congruence linéaire dont les directrices sont représentées par les points d'intersection avec Q de la droite r lieu du point V^1.

Lorsque la courbe (U) appartient à un plan ρ', la courbe (V) appartient au plan ρ conjugué du premier par rapport à Q. La surface (x) est une quadrique et on a $a = b = 0$.

57. *Surfaces dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires.* — Supposons que les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires Σ.

Le développable des tangentes à une courbe u de la surface (x) est représentée sur Q par une courbe u de la surface (U). Cette courbe appartient à un hyperplan Σ' image du complexe linéaire Σ contenant la développable. Les tangentes à la courbe u considérée sur (U) appartiennent à Σ' et il en est de même des points V qu'elles contiennent. A la courbe u de Σ' sur (U) correspond sur (V) une courbe u appartenant également à Σ'. Il en est de même de la courbe u homologue sur (V^1), de la courbe u homologue sur (V^2) et enfin de la courbe u homologue sur (V^3). Il en résulte que l'hyperplan Σ' coïncide avec l'hyperplan $UVV^1V^2V^3$. Cet hyperplan ne dépend pas de u et par conséquent son pôle U^1 ne dépend que de v. Il en résulte que la suite L s'arrête au point U^1 en présentant le cas de Laplace.

Plaçons-nous dans le cas général, où la courbe (U^1) n'appartient pas à un hyperplan. Alors, la suite L se termine dans le sens des u au point V^3 en présentant le cas de Goursat. Les points d'intersection G^1, G^2 de la droite V^2V^3 avec Q ne dépendent que de v.

Observons que les courbes u sur la surface (V^2) sont des droites, sur la surface (V^1) des courbes planes et sur la surface (V) des courbes appartenant à des espaces à trois dimensions.

Les complexes linéaires Σ dépendent de v et sont donc en nombre ∞^1. La congruence linéaire caractéristique d'un complexe Σ est représentée par l'intersection de Q et d'un espace linéaire à trois dimensions dont la conjuguée par rapport à Q est la droite $U^1U^1_v$. Cet espace est donc l'espace $VV^1V^2V^3$; il contient la courbe u tracée sur la surface (V) et par conséquent la congruence caractéristique du complexe Σ contient les tangentes aux courbes v aux points de la courbe u appartenant au complexe Σ.

Trois complexes Σ infiniment voisins successifs ont en commun une quadrique représentée par les plans $U_1U^1_vU^1_{vv}$ et $V^1V^2V^3$; c'est la quadrique Φ_1 attachée à la surface (x).

Quatre complexes linéaires Σ infiniment voisins successifs ont en commun deux droites g^1, g^2 représentées sur Q par les points d'intersection G^1, G^2 de la droite V^2V^3. Les droites g^1, g^2 sont les directrices d'une congruence linéaire représentée par l'intersection de Q avec un espace à trois dimensions osculateur de la courbe (U^1).

Les résultats précédents subsistent lorsque la courbe (U^1) appartient à un hyperplan. Il faut noter seulement que les congruences linéaires de directrices g^1, g^2 appartiennent à un même complexe linéaire représenté par la section de Q par l'hyperplan contenant (U^1).

58. Supposons que la courbe (U^1) appartienne à un espace à trois dimensions R'. Alors la suite L s'arrête au point V^2 en présentant le cas de Laplace et le lieu de ce point est la droite r conjuguée de R' par rapport à Q. La droite r coupe Q en deux points fixes G^1, G^2. Soient g^1, g^2 les droites correspondant à ces points.

Les hyperplans représentant les complexes Σ contiennent les points V^2, V^2_u, donc les complexes Σ contiennent les droites g^1, g^2.

La congruence caractéristique d'un complexe Σ est représentée par l'espace $VV^1V^2V^3$, donc cette congruence passe par les droites g^1, g^2.

Trois complexes linéaires infiniment voisins successifs ont en commun la quadrique représentée par les plans $U^1U^1_vU^1_{vv}$ et $V^1V^2V^3$, c'est une quadrique Φ_1 attachée à la surface (x).

Quatre complexes linéaires quelconques ont en commun les droites g^1, g^2.

Lorsque la courbe (U^1) est plane, la suite L s'arrête dans le sens des u au point V^1 en présentant le cas de Laplace. Alors, les courbes v de (x) appartiennent également à des complexes linéaires. Ce cas va être examiné.

59. *Surfaces dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires.* — Pour que les asymptotiques u, v de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires, la suite L doit s'arrêter au point U^1 dans le sens des v et au point V^1 dans le sens des u, chaque fois en présentant le cas de Laplace. Alors, les courbes (U^1), (V^1) sont nécessairement planes et situées dans des plans ρ^u, ρ^v, conjugués par rapport à Q. Désignons par Σ^u les complexes linéaires contenant les courbes u et par Σ^v ceux qui contiennent les courbes v.

Supposons en premier lieu que les plans ρ^u, ρ^v ne se rencontrent pas. Désignons par γ^u, γ^v les coniques suivant lesquelles ces plans rencontrent respectivement Q. Aux points des coniques γ^u, γ^v correspondent les génératrices rectilignes d'une quadrique Φ_1, qui est fixe. Appelons Φ_1^u la demi-quadrique homologue de la conique γ^u et Φ_1^v la demi-quadrique homologue de γ^v.

Les hyperplans polaires des points du plan ρ^v contiennent le plan ρ^u et par conséquent les complexes Σ^u appartiennent à un réseau ayant pour base la demi-quadrique Φ_1^u. De même, les complexes Σ^v appartiennent à un réseau ayant pour base la demi-quadrique Φ_1^v. Les complexes Σ^u et Σ^v sont en involution.

La congruence caractéristique d'un complexe Σ^u a pour directrices les intersections de Q avec la droite $V^1V_u^1$ et ces droites appartiennent à Φ_1^u. De même, la congruence linéaire caractéristique d'un complexe Σ^v a pour directrices deux droites de la demi-quadrique Φ_1^v.

60. Supposons maintenant que les plans ρ^u, ρ^v se rencontrent en un point P. Celui-ci étant son propre conjugué appartient à l'hyperquadrique Q et son hyperplan polaire ϖ contient les plans ρ^u, ρ^v. Il est d'ailleurs déterminé par ceux-ci.

Les plans ρ^u, ρ^v touchent Q en P et rencontrent chacun Q suivant deux droites passant par P. Nous désignerons par p_1^u, p_2^u celles de ces droites situées dans ρ^u et par p_1^v, p_2^v celles qui appartiennent à ρ^v.

Les points de la droite p_1^u sont conjugués des points des droites p_1^v, p_2^v, par conséquent les plans $p_1^u p_1^v$ et $p_1^u p_2^v$ appartiennent à Q. Il en est de même des plans $p_2^u p_1^v$ et $p_2^u p_2^v$.

Un plan appartenant à Q représente soit un plan réglé, soit une gerbe de rayons. Supposons pour fixer les idées que le plan $p_1^u p_1^v$ représente une gerbe de rayons de sommet P_1. Alors le plan $p_1^u p_2^v$ qui coupe le plan précédent suivant une droite représente un plan réglé ϖ_1 passant par P_1. De même, le plan $p_2^u p_1^v$ représente un plan réglé ϖ_2 passant par P_1. Le plan $p_2^u p_2^v$ qui n'a que le point P commun avec le plan $p_1^u p_1^v$ représente une gerbe de rayons dont le sommet P_2 appartient aux plans ϖ_1, ϖ_2.

La quadrique Φ_1 attachée au point x, considérée comme quadrique-lieu, dégénère dans les plans ϖ_1, ϖ_2 et considérée comme quadrique-enveloppe, dans les gerbes de rayons de sommets P_1, P_2.

Le réseau de complexes linéaires qui contient les complexes Σ^u a pour base les faisceaux de rayons (P_1, ϖ_2) et (P_2, ϖ_1). Celui qui contient les complexes Σ_v a pour base les faisceaux de rayons (P_1, ϖ_1), (P_2, ϖ_2). Les complexes Σ^u sont en involution avec les complexes Σ^v.

61. Supposons enfin que les plans ρ^u, ρ^v se rencontrent suivant une droite p. Celle-ci appartient à Q et représente un faisceau de rayons de sommet P et de plan ϖ.

L'espace à trois dimensions R qui contient les plans ρ^u, ρ^v touche Q le long de p et ces plans rencontrent chacun Q suivant la droite p comptée deux fois.

L'espace R coupe Q suivant deux plans ϖ_1, ϖ_2 certainement distincts de ρ^u, ρ^v car les points U^1, V^1 ne peuvent appartenir à Q. L'un de ces plans, par exemple ϖ_1, représente la gerbe de rayons de sommet P et l'autre le plan réglé ϖ. La quadrique Φ_1 dégénère comme quadrique-lieu dans le plan ϖ compté deux fois et comme quadrique-enveloppe dans la gerbe de rayons de sommet P comptée deux fois.

Les réseaux de complexes linéaires contenant les complexes Σ^u et Σ^v sont distincts, mais ont comme base commune le faisceau de droites (P, ϖ) compté deux fois.

Observons que les plans ρ^u, ρ^v sont nécessairement distincts, car autrement ils coïncideraient en un plan appartenant à Q et les points U^1, V^1 appartiendraient à cette hyperquadrique, ce qui est impossible.

62. Nous avons encore à considérer le cas où la suite L se termine au point U^1 en présentant le cas de Laplace, la courbe (U^1) appartenant à un espace à trois dimensions, et le cas où U^1 est fixe.

Dans le premier cas, la suite L se termine au point V en présentant le cas de Laplace, le lieu de V quand u varie étant une droite. La surface (x) est réglée, les asymptotiques v étant les génératrices rectilignes. Les asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires.

On doit avoir $a = 0$ (condition pour que les courbes v soient les génératrices rectilignes) et $h_1 = 0$ (condition pour que L s'arrête en U^1). Cela donne $(\log b)_{uv} = 0$ et b est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v.

Dans le dernier cas, la suite L s'arrête dans le sens des u au point U. La suite L n'existe pas.

63. *Note bibliographique.* — Les surfaces dont les asymptotiques d'un mode ou des deux modes appartiennent à des complexes linéaires ont été profondément étudiées par M. Terracini et plusieurs des raisonnements qui précèdent ne sont qu'une paraphrase de ceux de ce géomètre. Celui-ci a fait un exposé de ses recherches dans l'appendice IV, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*, de la *Geometria proiettiva differenziale* de G. Fubini et E Cech, citée plus haut.

64. *Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires.* — Nous avons désigné par R^u la réglée gauche lieu des tangentes aux courbes v aux différents points d'une courbe u de la surface (x). Une réglée R^u est représentée sur la surface (V) par une courbe u. Supposons que les réglées R^u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires, que nous désignerons par Σ. Alors une courbe u de la surface (V) appartient à un hyperplan Σ' image d'un complexe Σ.

Considérons une courbe u de (V). Ses tangentes appartiennent à l'hyperplan Σ' correspondant, par conséquent la courbe u homologue sur la surface (V^1) appartient à Σ'. Pour la même raison, il en est de même des courbes u homologues sur les surfaces (V^2), (V^3), (V^4) et l'hyperplan Σ' coïncide avec l'espace $VV^1V^2V^3V^4$, dont le pôle par rapport à Q est le point U^2. Celui-ci ne dépend donc que de v. Il en résulte que la suite de Laplace L s'arrête au point U^2 en présentant le cas de Laplace. On a donc $h_2 = 0$.

Plaçons-nous dans le cas général où la courbe (U^2) n'appartient pas à un hyperplan. Alors la suite L se termine dans le sens des u au point V^4 en présentant le cas de Goursat.

La surface (V^3) est la développable engendrée par les tangentes à la courbe (V^4), sur la surface (V^2), les courbes u sont planes, sur la surface (V^1) elles appartiennent à des espaces à trois dimensions.

La congruence linéaire caractéristique d'un complexe linéaire Σ est représentée par la section de Q par l'espace $V^1V^2V^3V^4$. Ses directrices sont représentées par les intersections de Q avec la droite $U^2U^2_v$.

Trois complexes Σ infiniment voisins successifs ont en commun une quadrique représentée sur Q par les plans conjugués $V^2V^3V^4$ et $U^2U^2_vU^2_{vv}$. C'est une quadrique Φ_2 associée à la surface (x). Observons qu'elle ne dépend que de v.

Quatre complexes linéaires Σ infiniment voisins successifs ont en commun les droites g^1, g^2 représentées par les intersections G^1, G^2 de la droite V^3V^4 avec Q, points qui ne dépendent que de v.

Les propositions précédentes subsistent quand la courbe (U^2) appartient à un hyperplan ; les congruences linéaires ayant pour directrices g^1, g^2 appartiennent au complexe linéaire représenté sur Q par l'hyperplan contenant la courbe (U^2).

65. Supposons que la courbe (U^2) appartienne à un espace à trois dimensions R'. Alors dans le sens des u, la suite L s'arrête au point V^3 en présentant le cas de Laplace et le lieu de V^3 est une droite r quand u varie.

Sur la surface (V^2), les courbes u sont planes et sur la surface (V^1), elles appartiennent à des espaces à trois dimensions.

La droite r rencontre Q en deux points fixes, représentant deux droites fixes g^1, g^2. Les complexes Σ contiennent tous ces deux droites.

La congruence linéaire caractéristique d'un complexe Σ est représentée par la section de Q par l'espace $V^1V^2V^3V^3_u$. Trois complexes linéaires Σ infiniment voisins successifs ont en commun une quadrique Φ_2 associée au point x et représentée par les plans $V^2V^3V^3_u$ et $U^2U^2_vU^2_{vv}$. Cette quadrique ne dépend que de v et passe par les droites g^1, g^2.

Lorsque la courbe (U^2) est plane, la suite L s'arrête au point V^2 en présentant le cas de Laplace et les réglées gauches R_v appartiennent également à des complexes linéaires.

66. *Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires.* — Supposons que les réglées R^u et R^v associées à la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. Alors, la suite L s'arrête au point U^2 dans le sens des v et au point V^2 dans le sens des u, en présentant chaque fois le cas de Laplace. Les courbes (U^2), (V^2) sont situées dans les plans respectivement ρ^v, ρ^u, conjugués par rapport à Q.

Faisons en premier lieu l'hypothèse que les plans ρ^u, ρ^v ne se rencontrent pas. La quadrique Φ_2 qui correspond à ces plans est fixe lorsque u et v varient.

Nous désignerons par Σ_u les complexes linéaires contenant les réglées R^u, par Σ_v ceux qui contiennent les réglées R^v, par Σ'_u et Σ'_v les hyperplans qui leur correspondent. Nous désignerons ensuite par Φ^u_2 la demi-quadrique de support Φ_2 lieu des droites qui correspondent à la section de Q par le plan ρ^u et par Φ^v la demi-quadrique qui correspond à la section de Q par ρ^v.

Sur la surface (V^1), les courbes u appartiennent à des espaces à trois dimensions et il en est de même des courbes v sur la surface (U^1).

Les hyperplans polaires des points du plan ρ^u passent par ρ^v et par suite, les complexes linéaires Σ_v appartiennent à un réseau qui a pour base la demi-quadrique Φ^v_2. De même, les complexes linéaires Σ_u appartiennent à un réseau ayant pour base la demi-quadrique Φ^u_2.

La congruence linéaire caractéristique d'un complexe Σ_u est représentée par l'intersection de Q avec l'espace $V^1V^2V^2_uV^2_{uu}$ et ses directrices sont représentées par les points de $U^2U^2_v$ appartenant à Q ; ce sont donc des droites de la demi-quadrique Φ^v_2. De même, la congruence caractéristique d'un complexe Σ_v a pour directrices deux droites de la demi-quadrique Φ^u_2.

Trois complexes Σ_u infiniment voisins successifs ont en commun la demi-quadrique Φ^u_2 et trois complexes Σ_v infiniment voisins successifs de la demi-quadrique Φ^v_2.

Les complexes Σ_u sont en involution avec les complexes Σ_v.

67. Supposons en second lieu que les plans ρ^u, ρ^v se rencontrent en un point P. Celui-ci étant son propre conjugué, appartient à Q. Il lui correspond une droite p.

En reprenant un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut (nº 60), on voit qu'il existe deux points P_1, P_2 situés sur la droite p et deux plans ϖ_1, ϖ_2 passant par p, tels que les complexes Σ_u appartiennent à un réseau ayant pour base les faisceaux de rayons (P_1, ϖ_2) et (P_2, ϖ_1), les complexes Σ_v appartenant également à un réseau ayant pour base les faisceaux de rayons (P_1, ϖ_1) et (P_2, ϖ_2).

68. Supposons en troisième lieu que les plans ρ^u, ρ^v se coupent suivant une droite p. Celle-ci appartient à Q et il lui correspond un faisceau de rayons de sommet P et de plan ϖ.

En raisonnant comme plus haut (nº 61), on voit que les complexes Σ_u appartiennent à un réseau dont la base contient le faisceau de rayons (P, ϖ) compté deux fois, les complexes Σ_v appartenant également à un réseau distinct du précédent mais contenant aussi dans sa base le faisceau (P, ϖ) compté deux fois.

69. Examinons maintenant le cas où les deux plans ρ^u, ρ^v coïncident en un plan ρ appartenant nécessairement à Q.

Un plan appartenant à Q représente soit une gerbe de rayons, soit un plan réglé. Supposons que le plan ρ représente une gerbe de rayons de sommet P et soient p^v un rayon de cette gerbe représentant un point U^2 et p^u un rayon représentant un point V^2. Les complexes Σ_u. Σ_v sont spéciaux, le premier ayant pour axe une droite p^v, le second une droite p^u.

Un point x de la surface (x) appartient à une surface R^u et à une surface R^v ; il lui correspond donc une droite p^v du cône (p^v) et une droite p^u du cône (p^u).

La congruence linéaire caractéristique d'un complexe Σ_u se réduit à la gerbe de sommet P et au plan réglé tangent au cône (p^v) le long de la droite p^v axe de Σ_u. On a une propriété analogue pour un complexe Σ_v.

Lorsque le plan ρ a pour homologue un plan ϖ, les droites p^v, p^u engendrent des courbes-enveloppes de ce plan et on a des propriétés analogues aux précédentes. La congruence linéaire caractéristique d'un complexe Σ_u se réduit au plan ϖ et à la gerbe de rayons dont le centre est le point de contact de la droite p^v correspondant à Σ_u avec la courbe (p^v).

70. *Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode et les asymptotiques de l'autre mode appartiennent à des complexes linéaires.* — Il nous reste à examiner le cas où la suite L se termine dans le sens des v au point U^2 en présentant le cas de Laplace, le lieu de U^2 lorsque v varie étant une droite r'. Alors, la suite se termine dans le sens des u, suivant le cas de Laplace, au point V^1, dont le lieu est une courbe appartenant à l'espace R à trois dimensions conjugué de la droite r' par rapport à Q.

Dans ce cas, les réglées R^u appartiennent à des complexes linéaires et les courbes v appartiennent également à des complexes linéaires.

Les complexes Σ_u forment un faisceau.

V. Congruences W.

71. *Définition.* — Weingarten a étudié en 1863 les surfaces telles qu'il existe une relation entre les rayons de courbure principaux ; elles ont été appelées surfaces de Weingarten. Plus tard, en 1872, Ribaucour a démontré que les normales à une surface de Weingarten forment une congruence telle que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales. Plus généralement Bianchi a appelé *congruences de Weingarten*, ou plus simplement *congruences W*, les congruences telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales.

Soient (j) une congruence de droites j et (x), $(\bar{x})$ ses nappes focales, que nous supposerons être des surfaces proprement dites. Si u, v sont les asymptotiques de la surface (x) et si (j) est une congruence W, les asymptotiques de la surface $(\bar{x})$ sont également les lignes u, v.

72. Théorème de Darboux. — *Sur la surface de l'hyperquadrique de Klein de* S_5 *représentant une congruence* W, *les courbes* u, v *forment un réseau conjugué et réciproquement.*

Désignons par

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

les points de la suite de Laplace associée à la surface (x) et par

$$\ldots, \bar{U}^n, \ldots, \bar{U}^1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}^1, \ldots, \bar{V}^n, \ldots \tag{L}$$

ceux de la suite de Laplace associée à la surface $(\bar{x})$. Dans ces suites, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les droites UV et $\bar{U}\bar{V}$ appartiennent à Q et se coupent en un point J image de la droite j engendrant par hypothèse une congruence W.

Supposons en premier lieu que les droites UU^1 et $\bar{U}\bar{U}^1$ se coupent en un point J^1. La droite JJ_v est l'intersection des plans VUU^1 et $\bar{V}\bar{U}\bar{U}^1$, donc elle passe par le point J^1. La droite $J^1J^1_u$ est l'intersection des plans U^1UV, $\bar{U}^1\bar{U}\bar{V}$, donc elle passe par J. Par conséquent, les points J et J^1 sont transformés de Laplace l'un de l'autre ; le point J décrit un réseau conjugué aux congruences (UV), $(\bar{U}\bar{V})$.

Supposons maintenant que les droites UU^1, $\bar{U}\bar{U}^1$ ne se rencontrent pas, de même que les droites VV^1, $\bar{V}\bar{V}^1$.

La droite JJ_v appartient aux plans VUU^1, $\bar{V}\bar{U}\bar{U}^1$; elle rencontre donc la droite UU^1 en un point J^1 et la droite $\bar{U}\bar{U}^1$ en un point $\bar{J}^1$.

Supposons que la droite JJ_v quand u varie engendre une développable. Le plan tangent à celle-ci contient les droites $J^1J^1_u$, $\bar{J}^1\bar{J}^1_u$ qui se rencontrent donc en un point X. Observons que $J^1J^1_u$ se trouve dans le plan U^1UV et $\bar{J}^1\bar{J}^1_u$ dans le plan $\bar{U}^1\bar{U}\bar{V}$, donc le point X se trouve sur l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la droite JJ_v. On en conclut que X coïncide avec les points J^1 et $\bar{J}^1$, de sorte que les droites UU^1 et $\bar{U}\bar{U}^1$ se rencontrent, contrairement à l'hypothèse.

Supposons ensuite que lorsque u varie, la droite JJ_v engendre une surface non développable. L'espace à trois dimensions Σ tangent à cette réglée le long de la droite JJ_v contient les droites $J^1J^1_u$, $\bar{J}^1\bar{J}^1_u$, JJ_u. Cette dernière rencontre VV^1 en un point J_{-1} et $\bar{V}\bar{V}_1$ en un point $\bar{J}_{-1}$. L'espace Σ contient J et le point de rencontre de la droite UV avec $J^1J^1_u$, donc il contient UV. Il contient le point J et le point de rencontre de $\bar{U}\bar{V}$ avec $\bar{J}^1\bar{J}^1_u$, donc il contient $\bar{U}\bar{V}$. Contenant U et J^1, Σ contient U^1 ; contenant $\bar{U}$ et $\bar{J}^1$, il contient $\bar{U}^1$. Σ contient V et J^{-1}, $\bar{V}$ et $\bar{J}^{-1}$, il contient V_1 et $\bar{V}^1$.

Les espaces U^1UVV^1 et $\bar{U}^1\bar{U}\bar{V}\bar{V}^1$ coïncident donc et il en est de même de leurs polaires par rapport à Q, c'est-à-dire des droites UV et $\bar{U}\bar{V}$, ce qui est absurde. Les droites UU^1 et $\bar{U}\bar{U}^1$ d'une part, VV^1 et $\bar{V}\bar{V}^1$ d'autre part doivent donc se rencontrer et le point J décrit un réseau conjugué aux congruences (UV) et $(\bar{U}\bar{V})$.

73. Réciproquement, supposons que le point J décrive un réseau conjugué u, v et désignons encore par (x), $(\bar{x})$ les nappes focales de la congruence (j).

Soit J^1 le transformé de Laplace de J dans le sens des v. Lorsque J décrit une courbe u, la droite JJ^1 décrit une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe u correspondante de la surface (J^1). Le plan tangent à la développable le long d'une génératrice est le plan tangent à la surface (J) au point de contact de cette génératrice.

Aux points d'une courbe u de (J) correspond une surface réglée dont les génératrices j touchent la surface (x) le long d'une courbe u de cette surface. Désignons cette réglée par $(j)_u$. Le plan tangent à cette réglée en un point de la ligne u est le plan tangent à la surface en ce point.

Lorsque v varie, l'enveloppe des surfaces $(j)_u$ oscule la courbe v issue d'un point quelconque de la courbe u. Il en résulte que le plan osculateur à cette courbe v en un point quelconque coïncide avec le plan tangent en ce point à la surface (x). Les courbes v sont des asymptotiques de cette surface.

On démontre d'une manière analogue que les courbes u sont des asymptotiques de la surface (x) et que les courbes u, v sont les asymptotiques de la surface $(\bar{x})$. La congruence (j) est donc une congruence W.

74. *Suite de Laplace inscrite dans les suites* L *et* $\bar{\text{L}}$. — Le point J détermine une suite de Laplace J dont nous désignerons les points par

$$\ldots, J^n, \ldots, J^1, J, J^{-1}, \ldots, J^{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{J})$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous avons vu que le transformé de Laplace J^1 dans le sens des v appartient aux droites UU^1, $\bar{U}\bar{U}^1$ et que le transformé dans le sens des u aux droites VV^1, $\bar{V}\bar{V}^1$.

La droite $J^1J^1_v$ rencontre la droite U^1U^2 en un point X puisqu'elle est située dans le plan UU^1U^2. La droite XX_u est également située dans ce plan. Les droites J^1J_v et XX_u sont également situées dans le plan $\bar{U}\bar{U}^1\bar{U}^2$, donc elles coïncident et les points J^1 et X sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Le point X coïncide donc avec J^2. Et ainsi de suite.

La suite J *est inscrite dans les suites* L *et* $\bar{L}$. *Le point* J^n *est l'intersection des droites* U^nU^{n+1} *et* $\bar{U}^n\bar{U}^{n+1}$, *le point* J^{-n} *l'intersection des droites* V^nV^{n+1} *et* $\bar{V}^n\bar{V}^{n+1}$.

Remarque. — Le fait que J décrit un réseau conjugué à la congruence (UV) suffit pour que la suite J soit inscrite dans la suite L, comme on le verra plus loin.

75. *Expression analytique du point* J. — Posons

$$J = \lambda U - \mu V.$$

On en déduit

$$J_v - J\,(\log\mu)_v = \lambda U^1 - U\left[\lambda\left(\log\frac{b\lambda}{\mu}\right)_v + 2a\mu\right],$$

$$J_{uv} - J_u\,(\log\mu)_v - J_v\,(\log\lambda)_u + J\,[(\log\lambda)_u\,(\log\mu)_v - 4ab] =$$
$$U\left[\lambda(\log\lambda)_{uv} + 2a\mu\left(\log\frac{a\mu}{\lambda}\right)_u\right] - V\left[\mu\,(\log\mu)_{uv} + 2b\lambda\left(\log\frac{b\lambda}{\mu}\right)_v\right].$$

Pour que le point J décrive un réseau (u, v), le dernier membre doit être identique à $\lambda U - \mu V$, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(\log\lambda)_{uv} + 2\left(\log\frac{a\mu}{\lambda}\right)_u = (\log\mu)_{uv} + 2\left(\log\frac{b\lambda}{\mu}\right)_v,$$

ou encore

$$\left(\frac{\lambda_v + 2a\mu}{\lambda}\right)_u = \left(\frac{\mu_u + 2b\lambda}{\mu}\right)_v.$$

Observons que si l'on remplace λ, μ par $\rho\lambda$, $\rho\mu$, l'expression précédente ne change pas. Or, cette relation exprime qu'il existe une fonction $\varphi(u, v)$ telle que l'on ait

$$\varphi_v = \frac{\lambda_v + 2a\mu}{\lambda}, \quad \varphi_u = \frac{\mu_u + 2b\lambda}{\mu}.$$

En posant $\rho = e^{-\varphi}$, on a

$$(e^{-\varphi}\lambda)_v + 2ae^{-\varphi}\mu = 0, \ (e^{-\varphi}\mu)_u + 2be^{-\varphi}\lambda = 0.$$

Si donc on change de notation en remplaçant λ, μ par $\rho\lambda$, $\rho\mu$, on a :

Dans l'expression

$$J = \lambda U - \mu V,$$

on peut choisir le facteur de proportionnalité de λ, μ *de manière à avoir*

$$\lambda_v + 2a\mu = 0, \quad \mu_u + 2b\lambda = 0.$$

Observons que les relations précédentes sont les mêmes que celles auxquelles satisfont U et V.

76. *Une seconde suite de Laplace associée à une congruence W.* — Considérons un espace linéaire S_6 à six dimensions rapporté à une figure de référence telle que l'espace S_5 considéré jusqu'à présent soit une des faces. Nous désignerons par O le sommet de la pyramide de référence opposé à l'espace S_5.

Les coordonnées projectives d'un point P de l'espace S_6 seront celles du point où la droite OP coupe l'espace S_5 et une septième quantité.

Cela étant, considérons dans S_6 le point U' dont les coordonnées sont celles de U et μ, et le point V' dont les coordonnées sont celles de V et λ. Les quantités λ, μ étant convenablement choisies, on a

$$U'_v + 2bV' = 0, \; V'_u + 2aU' = 0. \tag{1}$$

Les points U' et V' sont transformés de Laplace l'un de l'autre et déterminent une suite de Laplace L' que nous écrirons

$$\ldots, U'^n, \ldots, U'^1, U', V', V'^1, \ldots, V'^n, \ldots, \tag{L'}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les coordonnées du point U'^n sont celles du point U^n et une quantité μ^n déduite de μ, satisfaisant aux mêmes relations que U. Précisément, on a

$$\mu^n = \mu_v^{n-1} - \mu^{n-1} (\log bh_1 \ldots h_{n-1})_v, \; \mu_u^n = h_u\mu^{n-1}.$$

De même, le point V'^n a pour coordonnées celles de V^n et une quantité λ^n telle que

$$\lambda^n = \lambda_u^{n-1} - \lambda^{n-1} (\log ak_1 \ldots k_{n-1})_u, \; \lambda^n = k_u\lambda_u{}^{n-1}.$$

La suite L est la projection de la suite L' à partir de O sur S_5 et la suite J est l'intersection de la suite L' par l'espace S_5.

77. *Expression analytique des points de la suite* J. — La dernière propriété qui vient d'être obtenue permet d'obtenir une expression analytique des points de la suite J.

Un point de la droite $U'^n U'^{n-1}$ a des coordonnées de la forme

$$\xi U'^n - \eta U'^{n-1}$$

et pour que ce point appartienne à l'espace S_5, la dernière coordonnée doit être nulle, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\xi\mu^n - \eta\mu^{n-1} = 0.$$

On peut donc prendre pour le point J^n, l'expression

$$J^n = \mu^{n-1}U^n - \mu^n U^{n-1}.$$

De même, on peut écrire

$$J^{-n} = \lambda^{n-1}V^n - \lambda^n V^{n-1}.$$

Observons que l'on a

$$\mu^{n-1}J^n + \mu^n J_v^{n-1} = [\mu^{n+1} - \mu^n (\log b^2 \dots h_{n-1}^2 h_n)_v] J^{n-1},$$

$$\mu^{n-1}J_u^{n-1} - h_{n-1}\mu^{n-2}J^{n-1} = h_{n-1}\mu^n J^{n-2},$$

et de même

$$\lambda^{n-1}J^{-n} + \lambda^n J_u^{-(n-1)} = [\lambda^{n+1} - \lambda^n (\log a^2 \dots k_{n-1}^2 k_n] J^{-(n-1)},$$

$$\lambda^{n-1}J_v^{-(n-1)} - k_{n-1}\lambda^{n-2}J^{-(n-1)} = k_{n-1}\lambda^n J^{-(n-2)}.$$

En particulier, on a

$$J_{uv} - J_u (\log \mu)_v - J_v (\log \lambda)_u + [(\log \lambda)_u (\log \mu)_v - 4ab] J = 0.$$

78. *Une suite de Laplace circonscrite aux suites* L *et* $\overline{L}$. — Considérons la suite polaire de la suite J par rapport à l'hyperquadrique Q.

Désignons par P^n le pôle de l'hyperplan $J^{n-2}J^{n-1}J^n J^{n+1}J^{n+2}$. Les hyperplans $U^{n-3}U^{n-2} \dots U^{n+1}$ et $\overline{U}^{n-3}\overline{U}^{n-2} \dots \overline{U}^{n+1}$ qui contiennent les points $J^{n-2}J^{n-1}J^n J^{n+1}$ ont respectivement pour pôles les points V^{n-1} et $\overline{V}^{n-1}$, donc le point P^n se trouve sur la droite $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$.

Les hyperplans $U^{n-2}U^{n-1} \dots U^{n+2}$ et $\overline{U}^{n-2}\overline{U}^{n-1} \dots \overline{U}^{n+2}$, qui contiennent les points J^{n-1}, J^n, J^{n+1}, J^{n+2} ont respectivement pour pôles les points V^n et $\overline{V}^n$, donc le point P^n se trouve sur la droite $V^n\overline{V}^n$.

Les droites $V^{n-1}V^n$ et $\overline{V}^{n+1}\overline{V}^n$ se coupent au point J^{-n} et sont dans un même plan. Le point P^n est ainsi déterminé.

Le point P^n, *pôle de l'hyperplan* $J^{n-2}J^{n-1}J^nJ^{n+1}J^{n+2}$ *est l'intersection des droites* $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ *et* $V^n\overline{V}^n$.

De même, le point P^{-n} *pôle de l'hyperplan* $J^{-(n-2)}J^{-(n-1)}J^{-n}J^{-(n+1)}J^{-(n+2)}$ *est l'intersection des droites* $U^{n-1}\overline{U}^{n-1}$ *et* $U^n\overline{U}^n$.

Considérons le point P^{n-1} intersection des droites $V^{n-2}\overline{V}^{n+2}$ et $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$. Lorsque v varie, la droite $V^n\overline{V}^n$ engendre une développable puisque les tangentes aux courbes v en V^n. $\overline{V}^n$ se coupent au point $\overline{J}^n$. Par conséquent, la tangente à la courbe v sur (P^n) se trouve dans le plan contenant V^n, $\overline{V}^n$, V^{n-1}, $\overline{V}^{n-1}$. La droite $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ lorsque v varie engendre également une développable et la tangente à la ligne v en P^n se trouve dans le plan contenant les points V^{n+1}, $\overline{V}^{n-1}$, V^{n-2}, $\overline{V}^{n-2}$, tangent à cette développable. Il en résulte que la tangente à une courbe v en P^n est la droite $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$.

Un raisonnement analogue fait en partant des développables engendrées par les droites $V^{n-2}\overline{V}^{n-2}$, $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ lorsque u varie montre que la tangente à la ligne u au point P^{n-1} est la droite $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$. Il en résulte que les points P^n, P^{n-1} sont transformés de Laplace l'un de l'autre, P^{n-1} celui de P^n dans le sens des v, P^n celui de P^{n-1} dans le sens des u.

A la congruence (j) *est associée dans l'espace* S_5 *une suite de Laplace* $\mathcal{P}$

$$\ldots, P^n, \ldots, P^1, P, P^{-1}, \ldots, P^{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v, *circonscrites aux suites* L *et* $\overline{L}$.

Ce dernier point résulte d'ailleurs du fait que la suite $\mathcal{P}$ est la polaire de la suite $\mathcal{J}$, inscrite dans les suites L et $\overline{L}$.

L'hyperplan polaire du point J^n est $P^{n-2}P^{n-1}P^nP^{n+1}P^{n+2}$ et celui du point J^{-n}, $P^{-(n-2)}P^{-(n-1)}P^{-n}P^{-(n+1)}P^{-(n+2)}$.

79. L'hyperplan $J^2J^1JJ^{-1}J^{-2}$ est l'image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j. Son pôle par rapport à Q est le point P, intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$.

Considérons l'homologie H ayant pour centre le point P et pour hyperplan, $J^2J^1JJ^{-1}J^{-2}$. Elle transforme l'hyperquadrique Q en soi et fait donc correspondre aux points U, V les points $\overline{U}$, $\overline{V}$. Par conséquent, H fait correspondre à chacun des hyperplans déterminés par cinq points consécutifs des six points U^2, U^1, U, V, V^1, V^2 l'hyperplan déterminé par les cinq points homologues de la suite $\overline{L}$. Mais les points U^1 et $\overline{U}^1$, par exemple, ne sont pas des points homologues.

En particulier, au plan UU^1U^2 correspond le plan $\overline{U}\,\overline{U}^1\overline{U}^2$ et au plan VV^1V^2 correspond le plan $\overline{V}\overline{V}^1\overline{V}^2$.

80. *Une suite de quadriques associées à une congruence* W. — Les plans $J^nJ^{n+1}J^{n+2}$ et $P^nP^{n+1}P^{n+2}$ étant conjugués par rapport à Q, les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_n.

De même, aux plans $J^{-n}J^{-(n+1)}J^{-(n+2)}$ et $P^{-n}P^{-(n+1)}P^{-(n+2)}$ correspond une quadrique Ψ_{-n}.

Que n soit positif ou négatif, les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n ont en commun les côtés d'un quadrilatère gauche dont les arêtes sont représentées par les points de rencontre avec Q des droites J^nJ^{n+1} et P^nP^{n+1}. Les deux quadriques se touchent donc en quatre points.

Les plans J^1JJ^{-1} et P^1PP^{-1} sont conjugués par rapport à Q mais la quadrique Ψ qui leur correspond est dégénérée.

Le plan tangent J^1JJ^{-1} en J à la surface (J) coupe Q suivant deux droites p^1, p^2. Les plans déterminés par chacune des droites UV, $\overline{U}\overline{V}$ et par une des droites p^1, p^2 appartiennent à l'hyperquadrique Q, car chaque point d'une des deux premières droites est conjugué de chaque point des deux dernières.

Supposons, pour fixer les idées, que le plan UVp^1 représente un plan réglé. Alors les plans UVp^2 et $\overline{U}\overline{V}p^1$ représentent des gerbes de rayons et le plan $\overline{U}\overline{V}p^2$ un plan réglé. Nous savons que les faisceaux de rayons représentés par les droites p^1, p^2 ont pour sommets les foyers de la droite j et pour plans les plans focaux de cette droite. Le plan UVp^1 représente le plan tangent ξ à la surface (x) au point x et le plan $\overline{U}\overline{V}p^2$ le plan tangent $\bar{\xi}$ à $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$. Le plan UVp^2 représente la gerbe de rayons de sommet x et le plan $\overline{U}\overline{V}p^1$ la gerbe de rayons de sommet $\bar{x}$. La droite p^1 représente le faisceau $(\bar{x}, \xi)$ et la droite p^2, le faisceau $(x, \bar{\xi})$.

Comme quadrique-lieu, Ψ dégénère dans l'ensemble des plans ξ, $\bar{\xi}$ et comme quadrique-enveloppe dans l'ensemble des gerbes de rayons de sommets x, $\bar{x}$.

La quadrique Ψ_0 correspond au couple de plans JJ^1J^2, PP^1P^2. Cette quadrique passe par la droite j. La droite PP^1 passe par V et par $\bar{V}$, la droite JJ^1 touche Q en J, donc la quadrique Ψ_0 passe par les droites xx_v, $\bar{x}\bar{x}_v$ et touche le long de j la réglée engendrée par cette droite lorsque v varie. Elle touche donc les nappes focales en x et en $\bar{x}$.

La quadrique Ψ_{-0} correspond au couple de plans $JJ^{-1}J^{-2}$ et $PP^{-1}P^{-2}$; elle contient les droites xx_u et $\bar{x}\bar{x}_u$ et touche le long de j la réglée engendrée par cette droite lorsque u varie.

A chaque droite j *d'une congruence* W *est associée une suite de quadriques*

$$\ldots, \Psi_n, \ldots, \Psi_0, \Psi, \Psi_{-0}, \ldots, \Psi_{-n}, \ldots,$$

deux quadriques consécutives de la suite se touchant en quatre points. La quadrique Ψ est dégénérée dans les deux plans focaux de la droite j *et les quadriques Ψ_0, Ψ_{-0} passent par la droite* j *et touchent le long de cette droite respectivement les réglées engendrées par les droites de la congruence* j *lorsque* v *ou* u *varie.*

81. *Enveloppes des quadriques Ψ.* — Deux quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n se touchent en quatre points. Nous allons voir que ces quatre points sont caractéristiques pour les deux quadriques. La démonstration est en tout point analogue à celle qui a été faite pour les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n (nº 15), nous l'exposerons brièvement.

Soient C^1, C^2 les points d'intersection de la droite J^nJ^{n-1} avec Q et D^1, D^2 ceux de la droite P^nP^{n+1}, c^1, c^2, d^1, d^2 les droites qui sont représentées par ces points.

Pour montrer que le point c^1d^1 par exemple appartient à l'enveloppe commune aux quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n, il suffit de remarquer que lorsque u varie, les droites C^1C_u et D^1D_u sont tangentes aux coniques sections de Q par les plans $J^{n-1}J^nJ^{n+1}$ et $P^{n-1}P^nP^{n+1}$ respectivement. Lorsque v varie, les droites C^1C_v et D^1D_v sont respectivement tangentes aux sections de Q par les plans $J^nJ^{n+1}J^{n+2}$ et $P^nP^{n+1}P^{n+2}$. Il en résulte que la surface (c^1d^1) touche au point c^1d^1 les réglées engendrées par les droites c^1, d^1 lorsque u

et v varient. Par conséquent, la surface (c^1d^1) a même plan tangent que les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n au point c^1d^1.

Deux quadriques consécutives de la suite

$$\ldots, \Psi_n, \ldots, \Psi_0, \Psi, \Psi_{-0}, \ldots, \Psi_{-n}, \ldots$$

se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques. Toutefois, lorsqu'il s'agit des quadriques Ψ_0, Ψ ou Ψ, Ψ_{-0}, *ces quatre points se réduisent aux deux foyers de la droite* j.

82. *Les suites de quadriques attachées aux nappes focales d'une congruence* W. — Aux foyers x, $\bar{x}$ de la droite j sont attachées deux suites de quadriques

$$\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$$

pour le premier et

$$\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_n, \ldots.$$

pour le second. Cherchons quelles relations existent entre ces suites de quadriques et la suite des quadriques Ψ attachée à la droite j.

La droite J^nJ^{n+1} appartient aux plans $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ et $\bar{U}^{n-1}\bar{U}^n\bar{U}^{n+1}$, par conséquent les quadriques Φ_{n-1}, $\bar{\Phi}_{n-1}$, Ψ_{n-1} et Ψ_n ont en commun deux droites représentées par les points d'intersection de Q avec la droite J^nJ^{n+1}.

Aux quadriques Φ_{n-1}, Ψ_{n-1} correspondent les plans $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ et $P^{n-1}P^nP^{n+1}$, par conséquent ces quadriques ont en commun deux droites représentées par les points de Q situés sur la droite $V^{n-1}V^n$.

De même, les quadriques Φ_{n-1}, Ψ_n ont en commun deux droites représentées par les intersections de la droite V^nV^{n+1} avec Q. Les quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$, Ψ_{n-1} ont en commun deux droites représentées par les points de $V^{n-1}V^n$ situés sur Q. Les quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$, Ψ^n ont en commun les droites qui correspondent aux intersections de V^nV^{n+1} avec Q.

Les quadriques Φ_{n-1}, $\bar{\Phi}_{n-1}$, $\Psi_{-(n-1)}$, Ψ_{-n} ont en commun les droites représentées par les intersections de $J_{-(n-1)}J_{-n}$ avec Q. Les quadriques Φ_{n-1}, $\Psi_{-(n-1)}$ ont en commun les droites représentées par les points de Q situés sur la droite $U^{n-1}U^n$. Les droites représentées par les intersections de Q avec la droite U^nU^{n+1} appartiennent aux quadriques Φ_{n-1}, Ψ_{-n}. Enfin, les intersections des droites $\overline{\mathrm{U}}^{n-1}\overline{\mathrm{U}}^{n}$ et $\overline{\mathrm{U}}^{n}\overline{\mathrm{U}}^{n+1}$ avec Q appartiennent à la quadrique Φ_{n-1} et respectivement aux quadriques $\Psi_{-(n-1)}$ et Ψ_{-n}.

Les quadriques Φ_{n-1} et Φ_{n-1} ont en commun les points représentés par les intersections de Q avec les droites $\mathrm{J}^n\mathrm{J}^{n+1}$ et $\mathrm{J}^{-n}\mathrm{J}^{-(n+1)}$.

En particulier les quadriques Φ et $\overline{\Phi}$ des surfaces (x) et $(\bar{x})$ se coupent suivant quatre droites représentées par les intersections de Q avec les droites $\mathrm{J}^1\mathrm{J}^2$ et $\mathrm{J}^{-1}\mathrm{J}^{-2}$ et se touchent donc en quatre points.

84. *Congruences* W *dont une surface focale est attachée à une suite de Laplace terminée.* — Supposons que la suite L associée à la surface (x) se termine au point U^n en présentant le cas de Laplace. On a $h_n = 0$ et la suite L′ se termine également au point U'^n en présentant le cas de Laplace. Deux cas peuvent se présenter :

1) Les points U^n et U'^n coïncident $(\mu_n = 0)$. Alors le point J^n, intersection des droites $\mathrm{U}'^{n-1}\mathrm{U}'^n$ et $\mathrm{U}^{n-1}\mathrm{U}^n$ coïncide avec U^n et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $\mathrm{J}^n = \mathrm{U}^n$ en présentant le cas de Laplace.

2) Les points U'^n et U^n sont distincts. Le point J^n est distinct de U^n et les droites $\mathrm{U}^n\mathrm{U}^n_v$ et $\mathrm{U}'^n\mathrm{U}'^n_v$ se coupent en un point situé sur la droite $\mathrm{J}^n\mathrm{J}^n_v$ que nous appelerons J^{n+1}. Ce point reste fixe lorsque u varie, il dépend seulement de v et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point J^{n+1} en présentant le cas de Laplace.

La suite $\overline{\mathrm{L}}$ associée à la seconde nappe focale de la congruence (j) doit également se terminer et les cas suivants peuvent se présenter :

1) Le point $\overline{\mathrm{U}}^n$ coïncide avec le point J^n et donc avec le point U^n ; la suite $\overline{\mathrm{L}}$ se termine au point $\overline{\mathrm{U}}^n$ en présentant le cas de Laplace.

2) La suite $\overline{\mathrm{L}}$ s'arrête au point $\overline{\mathrm{U}}^n$ distinct de U^n en présentant le cas de Laplace et la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point J^{n+1} intersection des droites $\mathrm{U}^n\mathrm{U}^n_v$ et $\overline{\mathrm{U}}^n\overline{\mathrm{U}}^n_v$ en présentant le cas de Laplace.

3) La suite $\overline{\mathrm{L}}$ s'arrête au point $\overline{\mathrm{U}}^{n+1}$ en présentant le cas de Laplace ; ce point appartient à la droite $\mathrm{U}^n\mathrm{U}^n_v$ et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point J^{n+1} qui coïncide avec le point $\overline{\mathrm{U}}^{n+1}$.

85. Supposons que la suite L se termine au point V^{n+2} en présentant le cas de Goursat. Alors, la suite L′ se termine également au point V'^{n+2} en présentant le cas de Goursat, la courbe (V^{n+2}) étant la projection à partir de O de la courbe (V'^{n+2}).

Si les points V^{n+2} et V'^{n+2} coïncident, le point V'^{n+1} se trouve sur la droite $V^{n+1}V^{n+2}$, mais est distinct de V^{n+1}. Les points $J^{-(n+1)}$ et $J^{-(n+2)}$ dépendent de u et le dernier se trouve sur la droite $V^{n+1}V^{n+2}$. Le point $J^{-(n+3)}$ coïncide avec V^{n+2}. La suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J^{-(n+3)}$ en présentant le cas de Goursat.

Si les points V^{n+2} et V'^{n+2} sont distincts, les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $V'^{n+1}V'^{n+2}$ se coupent en un point $J^{-(n+2)}$. Les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $V'^{n+1}V'^{n+2}$ ne dépendent que de v et la courbe $(J^{-(n+2)})$ est l'intersection des deux surfaces développables engendrées par ces droites. Il en résulte que le point $J^{-(n+2)}$ ne dépend que de v et que la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point $J^{-(n+2)}$ en présentant le cas de Goursat.

La suite $\bar{L}$ s'arrête dans le sens des u en présentant également le cas de Goursat et les cas suivants peuvent se présenter :

1) Les points V^{n+2} et $\bar{V}^{n+2}$ coïncident et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J^{-(n+3)}$ qui coïncide avec les précédents.

2) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{V}^{n+1}$ qui appartient à la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ et coïncide avec le point $J^{-(n+2)}$.

3) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{V}^{n+2}$ distinct de V^{n+2} et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J^{-(n+2)}$ en présentant le cas de Goursat.

86. Le problème qui se pose est la détermination des congruences W dont la suite L associée à la nappe focale (x) se termine au point U^n en présentant le cas de Laplace. Nous l'étudierons dans l'hypothèse où la courbe (U^n) n'appartient pas à un hyperplan ou appartient à un seul hyperplan. Dans ces conditions, la suite L s'arrête au point V^{n+2} en présentant le cas de Goursat. Il s'agira de déterminer le comportement de la suite $\bar{L}$.

Pour abréger, nous appelerons F_n une surface associée à une suite de Laplace qui se termine au point U^n en présentant le cas de Laplace. Nous commencerons par étudier le cas où la surface $(\bar{x})$ est également une surface F_n pour passer ensuite à l'étude, plus intéressante, où la surface $(\bar{x})$ est une surface F_{n+1}.

87. Supposons en premier lieu que les surfaces (x) et $(\bar{x})$ soient des surfaces F_n et que les points U^n, $\overline{U}^n$ et par suite J^n coïncident.

Les points V^{n+2} et $\overline{V}^{n+2}$ coïncident également, car leurs hyperplans polaires, osculateurs à (U^n), coïncident.

Les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $\overline{V}^{n+1}\overline{V}^{n+2}$ coïncident, mais les points V^{n+1} et $\overline{V}^{n+1}$ ne coïncident pas. Les plans $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et $\overline{V}^n\overline{V}^{n+1}\overline{V}^{n+2}$ coïncident, de même que les espaces à trois dimensions $V^{n-1}V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et $\overline{V}^{n+1}\overline{V}^n\overline{V}^{n+1}\overline{V}^{n+2}$ et enfin les hyperplans $V^{n-2}V^{n-1} \dots V^{n+2}$, $\overline{V}^{n-2}\overline{V}^{n-1} \dots \overline{V}^{n+2}$, qui ont pour pôle commun le point U^n.

Le point $J^{-(n+1)}$ appartient aux droites V^nV^{n+1}, $\overline{V}^n\overline{V}^{n+1}$ et dépend de u. Le point $J^{-(n+2)}$ appartient à la droite $V^{n+1}\overline{V}^{n+1}$, c'est-à-dire à la droite $V^{n+1}V^{n+2}$, il dépend également de u. Le point $J^{-(n+3)}$ appartient à la même droite et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J^{-(n+3)}$ en présentant nécessairement le cas de Goursat. Il en résulte que le point $J^{-(n+3)}$ coïncide avec le point V^{n+2}.

Occupons-nous maintenant de déterminer les points de la suite $\mathcal{P}$.

Le point P^n est l'intersection des droites $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ et $V^n\overline{V}^n$, le point P^{n+1} celui des droites $V^n\overline{V}^n$ et $V^{n+1}\overline{V}^{n+1}$ ou $V^{n+1}V^{n+2}$. Ce point dépend de u et le point P_u^{n+1} appartient également à la droite $V^{n+1}V^{n+2}$. La suite $\mathcal{P}$ se termine au point P^{n+2} en présentant le cas de Goursat.

L'hyperplan $J^{-(n+3)}J^{-(n+2)} \dots j^{-(n-1)}$ coïncide avec l'hyperplan $V^{n+2}V^{n+1} \dots V^{n-2}$ et son pôle $P^{-(n+1)}$ coïncide donc avec U^n, $\overline{U}^n$ et J^n.

Le point P^{-n}, qui appartient à la droite $U^{n-1}\overline{U}^{n-1}$ est le pôle de l'hyperplan $J^{-(n-2)}J^{-(n-1)} \dots J^{-(n+2)}$ et dépend de u. On en conclut que la suite se termine au point $P^{-(n+1)}$ en présentant le cas de Laplace.

Lorsque les surfaces (x) *et* $(\bar{x})$ *sont des surfaces* F_n *telles que* $U^n = \overline{U}^n$, *la suite* $\mathcal{J}$ *se termine au point* $J^n = U^n$ *en présentant le cas de Laplace et au point* $J^{-(n+3)} = V^{n+2}$ *en présentant le cas de Goursat. La suite* $\mathcal{P}$ *se termine au point* $P^{-(n+1)}$ *en présentant le cas de Laplace et au point* $P^{n+2} = V^{n+2}$ *en présentant le cas de Goursat.*

Si la courbe (U^n) appartient à un hyperplan, le point V^{n+2} est fixe.

88. Supposons en second lieu que les surfaces (x), $(\bar{x})$ soient encore des surfaces F_n mais que les points U^n, $\bar{U}^n$ soient distincts. Le point J^{n+1} est alors l'intersection des droites $U^nU^n_v$ et $\bar{U}^n\bar{U}^n_v$. On supposera que les courbes (U^n), $(\bar{U}^n)$ n'appartiennent pas à des hyperplans.

Les points V^{n+2}, $\bar{V}^{n+2}$ sont distincts et les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $\bar{V}^{n+1}\bar{V}^{n+2}$ se rencontrent au point $J^{-(n+2)}$ qui ne dépend que de v. Lorsque v varie, la droite $J^{-(n+1)}J^{-(n+2)}$ est tangente en $J^{-(n+2)}$ à la courbe $(J^{-(n+2)})$ intersection des développables (V^{n+1}), $(\bar{V}^{n+1})$, d'arêtes de rebroussement (V^{n+2}), $(\bar{V}^{n+2})$ respectivement. La droite $J^{-(n+1)}J^{-(n+2)}$ ne dépend donc que de v et lorsque u varie, le point $J^{-(n+1)}$ varie sur cette droite. La suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J^{-(n+2)}$ en présentant le cas de Goursat.

Le point P^{n+2} est l'intersection des droites $V^{n+1}\bar{V}^{n+1}$ et $V^{n+2}\bar{V}^{n+2}$. Cette dernière droite ne dépend que de v. Les points V^{n+1}, $\bar{V}^{n+1}$ dépendent de u, donc lorsque u varie, le point P^{n+2} décrit la droite $V^{n+2}\bar{V}^{n+2}$. Lorsque v varie, cette droite engendre une développable, le plan tangent étant le plan $V^{n+2}\bar{V}^{n+2}J^{-(n+2)}$ contenant les tangentes aux points V^{n+2}, $\bar{V}^{n+2}$ et P^{n+2} aux courbes décrites par ces points. L'arête de rebroussement de cette développable est une courbe (P^{n+3}). L'hyperplan polaire de P^{n+3} coïncide d'ailleurs avec l'hyperplan osculateur à la courbe (J^{n+1}).

L'hyperplan $J^{-(n+2)}J^{-(n+1)} \ldots J^{-(n-2)}$ a pour pôle le point P^{-n} appartenant à la droite $U^n\bar{U}^n$, qui ne dépend que de v.

Observons que les courbes u de la surface $(J^{-(n+1)})$ sont des droites et par conséquent que sur la surface (J^{-n}), elles sont situées dans des plans, sur $(J^{-(n-1)})$, elles sont situées dans des espaces à trois dimensions et sur $(J^{-(n-2)})$, dans des hyperplans. Il en résulte que le point P^{-n} ne dépend que de v et que la suite $\mathcal{P}$ se termine au point P^{-n} en présentant le cas de Laplace.

Si les nappes focales (x) *et* $(\bar{x})$ *de la congruence* (j) *sont des surfaces* F_n *et si les points* U^n, $\bar{U}^n$ *sont distincts, la suite* $\mathcal{J}$ *s'arrête au point* J^{n+1} *en présentant le cas de Laplace et au point* $J^{-(n+2)}$ *en présentant le cas de Goursat. La suite* $\mathcal{P}$ *s'arrête au point* P^{-n} *en présentant le cas de Laplace et au point* P^{n+3} *en présentant le cas de Goursat.*

Lorsque la courbe (U^n) est située dans un seul hyperplan, le point V^{n+2} est fixe. Lorsque la courbe $(\bar{U}^n)$ appartient à un seul hyperplan, le point $\overline{V}^{n+2}$ est fixe. Lorsque cette circonstance se présente pour les courbes (U^n) et $(\overline{U}^n)$, le point P^{n+3} est fixe.

Si la courbe (J^{n+1}) appartient à un seul hyperplan, le point P^{n+3} est fixe mais la droite $V^{n+2}\overline{V}^{n+2}$ peut varier avec v, les courbes décrites par ces points étant sur un cône de sommet P^{n+3}.

89. Supposons enfin que (x) soit une surface F^n et $(\bar{x})$ une surface F_{n+1}.

Le point $\overline{U}^{n+1}$ appartient à la droite $U^nU^n_v$ et est distinct de U^n. La suite L se termine dans le sens des u au point V^{n+2} et la suite $\overline{L}$ au point $\overline{V}^{n+3}$.

La droite $\overline{V}^{n+2}\overline{V}^{n+3}$ est la conjuguée de l'espace à trois dimensions osculateur à la courbe $(\overline{U}^{n+1})$ au point $\overline{U}^{n+1}$. Or, cet espace appartient à l'hyperplan osculateur à la courbe (U^n) au point U^n, dont le pôle est V^{n+2}. Le point V^{n+2} appartient donc à la droite $\overline{V}^{n+2}\overline{V}^{n+3}$.

Le point $J^{-(n+2)}$ intersection des droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $\overline{V}^{n+1}\overline{V}^{n+2}$ parcourt, lorsque u varie, la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ qui ne dépend que de v. Il en résulte que le point $J^{-(n+3)}$ coïncide avec le point V^{n+2} et que la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point $J^{-(n+3)}$ dans le sens des u, en présentant le cas de Goursat. On sait d'autre part que le point J^{n+1} coïncide avec le point $\overline{U}^{n+1}$.

Le point P^{n+2} est le pôle de l'hyperplan $J^nJ^{n+1}J^{n+1}_vJ^{n+1}_{vv}J^{n+1}_{vvv}$. Il dépend de u mais varie sur la droite $\overline{V}^{n+2}\overline{V}^{n+3}$. Le point P^{n+3} est le pôle de l'hyperplan osculateur à la courbe (J^{n+1}) ou $(\overline{U}^{n+1})$; il coïncide donc avec le point $\overline{V}^{n+3}$. La suite $\mathcal{P}$ s'arrête donc dans le sens des u au point P^{n+3} en présentant le cas de Goursat.

Le point $P^{-(n+1)}$ est le pôle de l'hyperplan $J^{-(n-1)}J^{-n} \ldots j^{-(n+3)}$, hyperplan qui coïncide avec $V^{n-2}V^{n-1} \ldots V^{n+2}$. Observons que les courbes u sur la surface (V^n) sont planes, que sur la surface (V^{n-1}), elles appartiennent à des espaces à trois dimensions et sur la surface (V^{n-2}) à des hyperplans. Il en résulte que le point $P^{-(n+1)}$ ne dépend que de v et que la suite $\mathcal{P}$ se termine au point $P^{-(n+1)}$ en présentant le cas de Laplace.

Si les nappes focales (x), $(\bar{x})$ *de la congruence* W *sont la première une surface* F_n *la seconde une surface* F_{n+1}, *la suite* J *s'arrête au point* J^{n+1} *en présentant le cas de Laplace et au point* $J^{-(n+3)}$ *en présentant le cas de Goursat. La suite* $\mathcal{P}$ *s'arrête au point* $P^{-(n+1)}$

en présentant le cas de Laplace et au point P^{n+3} *en présentant le cas de Goursat.*

90. *Problèmes.* — La question qui vient d'être étudiée pose les problèmes suivants :

I. Une surface F_n étant donnée, existe-t-il une congruence W dont elle soit une nappe focale, la seconde nappe focale étant une surface F_{n+1} ?

II. Réciproquement, une surface F_{n+1} étant donnée, existe-t-il une congruence W dont elle soit une nappe focale, la seconde nappe focale étant une surface F_n ?

Observons que la solution du second problème donne en même temps la démonstration de l'existence des surfaces F_n, car elle permet de passer d'une surface F_0 (surface réglée) à une surface F_1 (surface dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires), d'une surface F_1 à une surface F_2 (surface dont les réglées asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires), et ainsi de suite.

91. Théorème. — *Une surface* F^n *étant donnée, elle est toujours nappe focale d'une congruence* W *dont la seconde nappe focale est une surface* F_{n+1}.

Supposons que (x) soit une surface F_n, s'arrêtant au point U^n. Conservons les notations précédentes. Il faut montrer que $(\bar{x})$ est une surface F_{n+1}.

Le point $\bar{U}^{n+1}$ appartient à la droite $U^n U^n_v$ et nous pouvons prendre $\bar{U}^{n+1} = U^n_v$, quitte à changer éventuellement le facteur de proportionnalité des coordonnées du point U^n. Le point $\bar{U}^n$ satisfait donc à la relation

$$\bar{U}^n_v + A\bar{U}^n = \bar{U}^{n+1} = U^n_v,$$

A étant une fonction de u, v. Le point $\bar{U}^n$ est donc déterminé par quadrature, le point U^n et la fonction A étant donnés.

Soient ξ l'hyperplan polaire du point $\bar{U}^n$, $J^{-(n-1)}$, J^{-n}, $J^{-(n+1)}$, $J^{-(n+2)}$ ses intersections avec les droites $V^{n-2}V^{n-1}$, $V^{n+1}V^n$, V^nV^{n+1} et $V^{n+1}V^{n+2}$.

Appelons $\bar{V}^{n+3}$ le pôle de l'hyperplan osculateur à la courbe $(\bar{U}^{n+1})$ au point $\bar{U}^{n+1}$. Le point V^{n+2} est le pôle de l'hyperplan osculateur à la courbe (U^n) au point U^n. Il a en commun avec le précédent un espace à trois dimensions dont la conjuguée est la droite $\overline{V}^{n+3}V^{n+2}$.

Le plan $V^{n+1}V^{n+2}\overline{V}^{n+3}$ ne dépend que de v et si u varie, le point $J^{-(n+2)}$ décrit une courbe de ce plan. La droite $J^{-(n+2)}$ $J^{-(n+2)}$ rencontre donc la droite $V^{n+2}V^{n+3}$. D'autre part, on a

$$\Omega(U^n,\ J^{-(n+2)}) = 0,\ \Omega(U^n,\ J_u^{-(n+2)}) = 0,$$

puisque U^n ne dépend que de v. Or, l'hyperplan polaire de U^n rencontre la droite $V^{n+2}\overline{V}^{n+3}$ au seul point V^{n+2}. On en conclut que le transformé de $J^{-(n+2)}$ dans le sens des u est le point $J^{-(n+3)} = V^{n+2}$. Le point V^{n+2} ne dépend que de v et la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ touche la courbe (V^{n+2}). Cette droite passant par $J^{-(n+2)}$, on en conclut que ce point satisfait à une équation de Laplace et détermine une suite se terminant au point $J^{-(n+3)} = V^{n+3}$ en présentant le cas de Goursat.

La droite $J^{-(n+2)}J^{-(n+2)}$ rencontre la droite V^nV^{n+1}. D'autre part, le point $J^{-(n+2)}$ appartient à l'hyperplan polaire de $\overline{U}^{(n+1)}$, donc on a

$$\Omega(\overline{U}^n,\ J^{-(n+2)}) = 0,\ \Omega(\overline{U}^n,\ J_u^{-(n+2)}) = 0.$$

Par conséquent, $J^{-(n+1)}$ est le transformé de Laplace de $J^{-(n+2)}$ dans le sens des v.

On démontre de même que les points J^{-n}, $J^{-(n-1)}$ sont les transformés de Laplace respectivement de $J^{-(n+1)}$, J^{-n} dans le sens des v.

Les points $J^{-(n+3)}$, $J^{-(n+2)}$, ..., $J^{-(n-1)}$ sont donc successifs dans une suite de Laplace $\mathcal{J}$. Soit J le point de cette suite qui appartient à la droite UV. Puisque ce point décrit un réseau (u, v), la droite j homologue de J décrit une congruence W dont la surface (x) est une nappe focale. A la seconde nappe focale $(\bar{x})$ est associée une suite de Laplace $\overline{L}$. Adoptons la notation habituelle et observons que cette suite se termine au point $\overline{V}^{n+3}$ en présentant le cas de Goursat. Le point $\overline{V}^{n+2}$ appartient à la droite $V^{n+2}\overline{V}^{n+3}$.

L'hyperplan ξ passe par $\overline{V}^{n+2}$ et par $J^{-(n+2)}$, donc par $\overline{V}^{n+1}$. Il passe par $J^{-(n+1)}$ donc par V^n, par J^{-n} donc par V^{n-1}, par $J^{-(n-1)}$ donc par V^{n-2}. Il en résulte que le point $\overline{U}^n$ appartient à la suite $\overline{L}$ qui se termine au point $\overline{U}^{n+1}$ en présentant le cas de Laplace.

92. Théorème. — *Une surface* F_{n+1} *étant donnée, il existe une*

congruence W *dont elle est surface focale, la seconde surface focale étant une surface* F^n.

Soit $(\bar{x})$ une surface F_{n+1} donnée. Nous devons démontrer qu'il existe une congruence W ayant $(\bar{x})$ comme nappe focale, la seconde nappe focale (x) étant une surface F_n.

La suite de Laplace $\bar{L}$ associée à $(\bar{x})$ se termine au point $\bar{U}^{n+1}$ en présentant le cas de Laplace et au point $\bar{V}^{n+3}$ en présentant le cas de Goursat. Si la surface (x) existe, la suite L qui lui est associée se termine au point U^n en présentant le cas de Laplace et la droite $U^n U^n_v$ passe par le point $\bar{U}^{n+1}$. On a donc une relation

$$U^n + AU^n_v = B\bar{U}^{n+1}, \tag{1}$$

où A et B sont des fonctions de v seul. On en déduit U^n par quadratures.

Soit ξ l'hyperplan polaire de U^n par rapport à Q. Désignons par $J^{-(n-1)}$ la section de $\bar{V}^{n-2}\bar{V}^{n-1}$ par ξ, par J^{-n} celle de $\bar{V}^{n-1}\bar{V}^n$, par $J^{-(n+1)}$ celle de $\bar{V}^n\bar{V}^{n+1}$, par $J^{-(n+2)}$ celle de $\bar{V}^{n+1}\bar{V}^{n+2}$, enfin par $J^{-(n+3)}$ celle de $\bar{V}^{n+2}\bar{V}^{n+3}$.

La droite $J^{-(n-1)}\, J^{-(n-1)}_u$ s'appuie sur $\bar{V}^{n-1}\bar{V}^n$ puisque la droite $\bar{V}^{n+2}\bar{V}^{n-1}$ engendre une développable dont le plan tangent est $V^{n-2}V^{n-1}V^n$. D'autre part, puisque U^n ne dépend que de v, on a

$$\Phi(U^n,\ J^{-(n-1)}) = 0,\ \Phi(U^n,\ J^{-(n-1)}_u) = 0.$$

La droite $J^{-(n-1)}J^{-(n-1)}_u$ appartient donc à ξ et passe par J^{-n}.

La droite $J^{-n}J^{-n}_v$ rencontre $\bar{V}^{n-2}\bar{V}^{n-1}$. D'autre part, on a

$$\Omega(U^n,\ J^{-n}) = 0,\ \Omega(\bar{U}^{n+1},\ J^{-n}) = 0$$

d'où, en utilisant la relation (1),

$$\Omega(U^n, J^{-n}_v) = 0.$$

Il en résulte que la droite $J^{-n}J^{-n}_v$ passe par le point $J^{-(n-1)}$. Les points $J^{-(n-1)}$, J^{-n} sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre et chacun d'eux décrit un réseau conjugué (u, v).

Par le même procédé, on démontre que les points J^{-n} et $J^{-(n+1)}$, $J^{-(n+1)}$ et $J^{-(n+2)}$, $J^{-(n+2)}$ et $J^{-(n+3)}$ sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Observons que l'on a

$$\Omega(U^n,\ J^{-(n+3)}) = 0,\ \Omega(\bar{U}^{n+1},\ J^{-(n+3)}) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\Omega(U^n, J_u^{-(n+3)}) = 0, \quad \Omega(\overline{U}^{n+1}, J_u^{-(n+3)}) = 0.$$

Par conséquent le point $J_u^{-(n+3)}$ coïncide avec $J^{-(n+3)}$ et les coordonnées de ce point ne dépendent que de v.

Les points $J^{-(n-1)}$, J^{-n}, $J^{-(n+1)}$, $J^{-(n+2)}$, $J^{-(n+3)}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace qui se termine au point $J^{-(n+3)}$ en présentant le cas de Goursat. Cette suite fait partie d'une suite $\mathcal{J}$ inscrite dans la suite $\overline{L}$ et qui se termine au point J^{n+1} coïncidant avec le point $\overline{U}^{n+1}$ en présentant le cas de Laplace.

Le point J de la suite $\mathcal{J}$ appartient à la droite $\overline{U}\overline{V}$ et à une droite UV représentant les tangentes au point $\bar{x}$ à la seconde nappe focale de la congruence (j).

Le point V^{n+2} de la suite L appartient à la droite $\overline{V}^{n+2}\overline{V}^{n+3}$ car le point $J^{-(n+3)}$ doit appartenir à la droite $V^{n+2}V^{n+3}$. Si le point V^{n+2} dépend de u, la suite L se termine au point V^{n+3} qui coïnciderait avec $\overline{V}^{n+3}$ et la suite $\mathcal{J}$ se terminerait en ce point. Or, cela est impossible puisque $J^{-(n+3)}$ ne dépend pas de u.

Par suite V^{n+2} ne dépend pas de u. Si les points V^{n+2} et $J^{-(n+2)}$ ne sont pas distincts, le point $J^{-(n+2)}$ ne dépend que de v, alors qu'il dépend de u. Il en résulte que les points $J^{-(n+3)}$ et V^{n+3} coïncident et que le lieu de $J^{-(n+2)}$ est une droite $V^{n+1}V^{n+2}$ ne dépendant que de v.

L'hyperplan ξ contient $J^{-(n+1)}$ et $J^{-(n+2)}$, donc le point V^{n+1}. Il contient J^{-n} donc V^n. De même, il contient les points V^{n-1} et V^{n-2}. Son pôle U^n par rapport à Q termine donc la suite L. Ce point coïncide avec P^{n+1}.

93. *Cas particuliers.* — Pour $n = 0$, la congruence W a pour nappes focales une réglée F_0 et une surface F_1 dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires. C'est Corrado Segre qui a remarqué que si une nappe focale d'une congruence W est une réglée, la seconde nappe focale est en général une surface F_1 (*Opere*, t. II, 1958, pp. 117-129). Fubini a ensuite démontré que toute surface F_1 peut être obtenue par ce procédé en partant de ∞^3 surfaces réglées (Fubini-Cech, *Geometria proiettiva differenziale*, tome I, p. 280). On consultera aussi sur ce point l'Appendice IV au traité précédent, dû à M. Terracini, qui a donné une démonstration géométrique du théorème de Fubini.

Pour $n = 2$, on voit que les surfaces dont les réglées asymptotiques gauches d'un mode appartiennent à des complexes linéaires peuvent être obtenues en considérant une congruence W dont une nappe focale est une surface dont les asymptotiques d'un mode appartiennent également à des complexes linéaires.

94. *Congruences* W *attachées à une surface* F_n. — Soit (x) une surface F_n. La suite de Laplace L qui lui correspond se termine dans le sens des v au point U^n en présentant le cas de Laplace et au point V^{n+2}, dans le sens des u, en présentant le cas de Goursat.

Nous avons démontré que les points de rencontre G^1, G^2 de la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ avec Q ne dépendent que de v. Nous allons voir que chacun de ces points termine une suite de Laplace inscrite dans la suite L. Pour simplifier notre exposé, nous ne considérerons qu'un seul des points G^1, G^2, que nous désignerons par G.

Le point G décrit une courbe sur la développable (V^{n+1}), d'arête de rebroussement (V^{n+2}). Pour une valeur v_0 de v, la courbe u appartenant à la surface (V^n) appartient à un plan qui contient la droite GG_v. Soit $J^{-(n+1)}$ le point de rencontre de cette droite avec une droite V^nV^{n+1}. Lorsque u varie, le point $J^{-(n+1)}$ décrit la droite GG_v et par conséquent le point $J_u^{-(n+1)}$ appartient à cette droite. Il en résulte que lorsque u et v varient, le point $J^{-(n+1)}$ satisfait à une équation de Laplace. Il détermine donc une suite de Laplace inscrite dans la suite L et qui se termine au point G en présentant le cas de Goursat. Nous désignerons cette suite par $\mathcal{J}$.

Dans le sens des v, la suite $\mathcal{J}$ se termine en présentant le cas de Laplace, soit au point J^n qui coïncide avec U^n, soit au point J^{n+1} qui appartient alors à la droite $U^nU^n_v$.

Envisageons le cas où la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J^n = U^n$. Considérons dans l'espace S_6 la suite L' dont L est la projection à partir de O. (n° 76). Le point U'^n doit coïncider avec le point U^n. Si le point V'^{n+2} qui termine la suite L' dans le sens des u coïncidait avec V^{n+2}, le point V^{n+1} appartiendrait à la droite $V^{n+1}V^{n+2}$, le point V'^n appartiendrait au plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et ainsi de suite. La suite L' appartiendrait à l'espace S_5, ce qui est absurde.

Si le point V'^{n+2} est distinct de V^{n+2}, il appartient à la droite OV^{n+2} et s'il dépend de u, il décrit cette droite lorsque u varie osculant la courbe (U^2) en U^2. Il en résulte que les droites g^1, g^2 homologues des points G^1, G^2 de rencontre de V^3V^4 avec Q sont communes à un complexe Σ et aux trois complexes qui lui sont infiniment voisins successifs.

L'hyperplan $GJ^{-3}J^{-2}J^{-1}J$ osculateur à la courbe (G) a pour pôle par rapport à Q un point P^{-2}. Si l'on désigne par R la surface engendrée par la droite g homologue du point G, cet hyperplan représente le complexe linéaire déterminé par cinq génératrices infiniment voisines successives de la réglée R. Ce complexe ne dépend que de v et au point J correspond une droite j appartenant à ce complexe et tangente à la surface (x), droite en général unique. Lorsque u varie, le point de contact de j avec (x) décrit une courbe u sur cette surface. Cela donne une construction de la congruence (j).

Si (x) *est une surface dont les réglées gauches asymptotiques relatives aux courbes* u *appartiennent à des complexes linéaires, quatre de ces complexes infiniment voisins successifs ont en commun deux droites représentées par les points d'intersection de la droite* V^3V^4 *avec l'hyperquadrique* Q. *Chacune de ces droites, lorsque* u *varie, engendre une réglée. Les tangentes à la surface* (x) *le long d'une courbe* u *et appartenant au complexe linéaire osculant une de ces surfaces réglées, engendrent, lorsque* v *varie, une congruence* W *dont* (x) *est une nappe focale.*

99. *Un théorème de Demoulin.* — Soit (j) une congruence W dont les nappes focales (x) et $(\bar{x})$ sont associées à des suites de Laplace L et $\bar{L}$ quelconques.

Le complexe linéaire Σ osculateur le long de la droite j à la congruence (j) a pour image l'hyperplan $J^2J^1JJ^{-1}J^{-2}$. Le pôle de cet hyperplan est le point P intersection des droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$. Nous avons appelé H l'homologie harmonique de centre P et d'hyperplan $J^2J^1 \dots J^{-2}$. Le point de rencontre de cet hyperplan avec la droite $U\bar{U}$ (ou $V\bar{V}$) est le conjugué harmonique de P par rapport à U, $\bar{U}$ (ou V, $\bar{V}$). Il en résulte que H transforme le plan U^2U^1U dans le plan $\bar{U}^2\bar{U}^1\bar{U}$ et le plan V^2V^1V dans le plan $\bar{V}^2\bar{V}^1\bar{V}$.

L'homologie H représente la polarité par rapport au complexe linéaire Σ. Il résulte de ce qui précède que les quadriques de Lie Φ

et $\overline{\Phi}$ relatives aux points x et $\bar{x}$ se correspondent dans cette polarité. On obtient ainsi le théorème de Demoulin :

Les quadriques de Lie des nappes focales d'une congruence W *relatives aux foyers d'une droite* j, *se correspondent dans la polarité déterminée par le complexe linéaire osculateur à la congruence le long de la droite considérée.*

TABLE DES MATIÈRES