Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Systèmes linéaires adjoints l'un à l'autre tracés sur une variété généralisant la surface d'Enriques.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques
(seconde note)

par † LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Systèmes linéaires adjoints l'un à l'autre tracés sur une variété généralisant la surface d'Enriques.

On doit à M. Burniat un élégant modèle projectif de la surface d'Enriques. Il considère dans un espace linéaire à onze dimensions, deux surfaces de Veronese dont les espaces ambiants ne se rencontrent pas, la variété W à cinq dimensions, d'ordre 16, lieu des droites joignant les points de ces surfaces. La section de la variété W par un espace linéaire à huit dimensions est une surface d'Enriques ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$), privée de courbe canonique et de courbes pluricanoniques de rang impair, mais possédant des courbes canoniques de rang pair d'ordre zéro [1].

Ce théorème se généralise aisément et nous avons établi ce résultat [2]. Dans un espace linéaire à $(n + 1)(n + 2) - 1$ dimensions, on considère deux variétés de Veronese à n dimensions dont les espaces ambiants ne se rencontrent pas et la variété W d'ordre 2^{2n},

[1] *Recherches sur les surfaces de bigenre un* (Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1936, pp. 1-100).

[2] *Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1974, pp. 1183-1187).

à $2n + 1$ dimensions. La section de la variété W par un espace linéaire à $n(n + 2)$ dimensions est

si n est pair, une variété privée de variétés canonique et pluricanoniques de rang impair, mais possédant des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro

si n est impair, une variété possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Nous voudrions revenir sur ces questions en particulier sur les couples de systèmes linéaires adjoints l'un à l'autre. Nous reprendrons rapidement le raisonnement de notre première note.

1. Soit, dans un espace S_{2n+1} à $2n + 1$ dimensions, une homographie biaxiale harmonique H possédant deux axes σ_1, σ_2 à n dimensions. Les hyperquadriques de S_{2n+1} linéairement indépendantes sont au nombre de $(n + 1)(2n + 3)$. Celles qui sont transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes. L'un, $|Q_1|$, de dimension $(n + 1)(n + 2) - 1$, est formé des hyperquadriques ne passant pas par les axes σ_1, σ_2 de H, l'autre, $|Q_2|$ est formé des hyperquadriques passant par les axes σ_1, σ_2. Il a la dimension $(n + 1)^2 - 1$.

Rapportons projectivement les hyperquadriques Q_1 aux hyperplans d'un espace $S_{(n+1)(n+2)-1}$ à $(n + 1)(n + 2) - 1$ dimensions. Aux couples de points de l'involution I engendrée par H dans S_{2n+1} correspondent les points d'une variété W d'ordre 2^{2n}, à $2n + 1$ dimensions.

Considérons dans S_{2n+1} une variété algébrique V, à n dimensions, d'ordre $2n + 2$, intersection complète d'hypersurfaces. Les variétés canoniques de V sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $2(n + 1) - (2n + 2) = 0$, c'est-à-dire que la variété canonique de V est d'ordre zéro. Tout système linéaire tracé sur V est son propre adjoint. Pour plus de simplicité, nous prendrons pour V l'intersection complète de $n + 1$ hyperquadriques Q_1, choisies de telle manière que V ne rencontre ni σ_1, ni σ_2. Dans ces conditions, les groupes de I appartenant à V forment une involution privée de point uni et représentée par une variété Ω intersection de W et des hyperplans correspondant aux hyperquadriques Q_1 passant par V, c'est-à-dire la section de W par un espace linéaire à $n(n + 2)$ dimensions.

Désignons par F_1 les variétés découpées par les hyperquadriques Q_1 sur V et par F_2 celles qui sont découpées par les hyperquadriques Q_2. Les systèmes $| Q_1 |$ et $| Q_2 |$ ont la même dimension $n(n + 2)$ Soient Φ_1, Φ_2 les variétés qui correspondent à F_1, F_2 sur Ω.

Considérons une variété F_1^+ et la variété Φ_1^+ qui lui correspond sur Ω. Le système canonique de F_1^+ est découpé par les hyperquadriques et le système canonique de cette variété contient donc deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, $| (F_1^+, F_1) |$, a la dimension $n(n + 2) - 1$, l'autre, $| (F_1^+, F_2) |$, a la dimension $n(n + 2)$. Nous avons démontré (1) que si la dimension $n - 1$ de F_1^+ est impaire, c'est le système le plus ample qui est le transformé du système canonique de Φ_1^+. Si donc n est pair, le système $| \Phi_2 |$ est l'adjoint au système $| \Phi_1 |$. Nous supposerons donc dorénavant *n pair*. Dans ces conditions, $| \Phi_1 |$ est également l'adjoint au système $| \Phi_2 |$ et on a

$$| \Phi_1' | = | \Phi_2 |, | \Phi_2' | = | \Phi_1 |.$$

Les variétés Φ_1 sont les sections hyperplanes de Ω et le long de chaque variété Φ_2, il y a une hyperquadrique qui touche Ω.

2. Désignons par ξ_1, les hyperplans passant par σ_1, par G_1 les variétés qu'ils découpent sur V, par ξ_2 les hyperplans passant par σ_2, par G_2 les variétés qu'ils découpent sur V.

Une variété G_1 est l'intersection de $n + 1$ hyperquadriques dans un espace à $2n$ dimensions, donc son système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2n + 2 - (2n + 1) = 1$, c'est-à-dire par les hyperplans de ξ_1.

Considérons une variété G_1^+ et la variété Γ_1^+ qui lui correspond sur Ω. Le système canonique de la variété G_1^+ contient deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un est découpé par les variétés G_1 et a la dimension $n - 1$, l'autre est découpé par les variétés G_2 et a la dimension n. C'est donc ce dernier qui est le transformé du système canonique de Γ_1^+ et le système de variétés $| \Gamma_2 |$ qui correspond

(1) *Une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

à $| G_2 |$ sur Ω est l'adjoint à $| \Gamma_1 |$. Un raisonnement analogue montre que les variétés Γ_1 sont adjointes aux variétés Γ_2. On a

$$| \Gamma_1' | = | \Gamma_2 |, | \Gamma_2' | = | \Gamma_1 |.$$

A la section G de la variété V par un hyperplan ξ correspond sur Ω une variété Γ qui correspond aussi à la variété que H fait correspondre à G. La variété Γ varie dans un système linéaire.

Faisons tendre d'une manière continue ξ vers un hyperplan ξ_1. La variété Γ tend vers une variété Γ_1 comptée deux fois. De même, si ξ tend vers un hyperplan ξ_2, Γ tend vers une variété Γ_2 comptée deux fois. On a donc

$$| 2\Gamma_1 | = | 2\Gamma_2 |.$$

et il existe un hyperplan touchant Ω le long d'une variété Γ_1 ou d'une variété Γ_2. On a

$$| 2\Gamma_1 | = | 2\Gamma_2 |$$

et de plus

$$| \Phi_1 | = | 2\Gamma_1 | = | 2\,\Gamma_2 |.$$

On a en outre

$$| \Phi_2 | = | \Gamma_1 + \Gamma_2 |.$$

3. Considérons un espace S_{2n-1} à $2n - 1$ dimensions s'appuyant en des espaces σ_1', σ_2' à $n - 1$ dimensions respectivement sur σ_1 et σ_2. Cet espace est transformé en soi par H et coupe la variété V suivant une variété V' à $n - 2$ dimensions. Nous désignerons par Ω' la variété qui correspond sur Ω à la variété V'. Dans S_{2n-1} les variétés canoniques de la variété V', intersection de $n + 1$ hyperquadriques, sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $2(n + 1) - 2n = 2$, c'est-à-dire par les hyperquadriques. Les hyperquadriques de S_{2n-1} transformées en elles-mêmes par H forment deux familles. L'une de dimension $n^2 - 1$ comprend celles qui ne passent ni par σ_1', ni par σ_2', ni par V'. La seconde, de même dimension $n^2 - 1$, comprend celles qui contiennent σ_1' et σ_2'. Les premières sont découpées sur S_{2n-1} par les hyperquadriques Q_1, les secondes par les hyperquadriques Q_2.

On en conclut comme plus haut que c'est le second système qui correspond au système canonique de la variété Ω'. Ce résultat était à prévoir. Les premières variétés sont des sections hyperplanes Φ_1 de Ω, les secondes des variétés Φ_2.

4. Soient $|K_1|$ un système linéaire de variétés à $n-1$ dimensions tracé sur Ω et $|K_2|$ son adjoint. A ces systèmes correspondent sur V des systèmes $|K'_1|$ et $|K'_2|$ (1). Le système $|K_2|$ est l'adjoint à $|K_1|$ et par suite $|K'_2|$ est adjoint à $|K'_1|$. Mais d'autre part $|K'_1|$ étant tracé sur V, est son propre adjoint. L'adjoint à $|K'_1|$ contient donc les systèmes $|K'_1|$ et $|K'_2|$, qui appartiennent à un même système linéaire.

On voit donc que deux systèmes adjoints l'un de l'autre sur Ω proviennent d'un même système linéaire de V.

Entre les systèmes linéaires de Ω on a une correspondance biunivoque privée d'élément uni, car Ω ne peut contenir un système qui soit son propre adjoint. Les couples de cette correspondance sont représentés par les systèmes linéaires de V.

Liège, le 17 mars 1975.

(1) *Variétés algébriques possédant deux systèmes linéaires dont chacun est l'adjoint de l'autre* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1975, pp. 192-197).