Bulletin de la Classe des sciences

Sur certains systèmes infinis de quadriques

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Construction d'un système infini de quadriques dépendant de deux paramètres, tel que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur certains systèmes infinis de quadriques

par † Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'un système infini de quadriques dépendant de deux paramètres, tel que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques.

On sait que dans la méthode imaginée par Klein pour représenter les droites de l'espace S_3 par les points d'une hyperquadrique Q d'un espace à cinq dimensions S_5, aux génératrices rectilignes d'une quadrique correspondent les points de Q situés dans un plan σ. Les génératrices rectilignes de l'autre mode sont représentées par la section de Q par le plan σ' conjugué de σ par rapport à Q. Partant de cette remarque, C. Segre a considéré les suites de quadriques de S_3 correspondant aux plans osculateurs d'une courbe ou aux plans tangents à une surface de S_5 (1). En géométrie projective différentielle, la représentation de Klein fut utilisée par Tzitzeica (2) et par M. Bompiani (3) pour montrer que les points représentant les tangentes asymptotiques en un point d'une surface sont transformés de Laplace

(1) *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche e sui rispettivi inviluppi* (Scritti matematici offerti ad Enrico d'Ovidio, Torino, 1918. *Opere*, Vol. II, pp. 130-159).

(2) G. Tzitzeica, *Géométrie projective différentielle des réseaux* (Paris, 1924).

(3) Bompiani, *Sull'equazione di Laplace* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912, t. 34, pp. 383-407). Voir aussi *I fondamenti della teoria proettiva delle curve e delle superficie* (Appendice au traité *Geometria proiettiva differenziale* de Fubini et Cech, Bologna, 1927).

l'un de l'autre. Elle nous a permis d'associer à un point d'une surface une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie, deux quadriques consécutives se touchant en quatre points caractéristiques pour chacune des quadriques ([1]). Nous avons aussi attaché à chaque droite d'une congruence W une suite de quadriques analogue ([2]). Le but de cette note est de montrer que les suites de quadriques dont il vient d'être question sont des cas particuliers d'une suite déterminée au moyen d'une suite de Laplace de S_5. Un cas particulier de cette suite nous conduit à un système de congruences W.

Nous terminons en apportant une légère amélioration à la suite de quadriques associée à une droite d'une congruence W ([3]).

1. Soient dans un espace S_5 à cinq dimensions une hyperquadrique Q représentant suivant le concept de Klein, les droites de l'espace à trois dimensions S_3 et une suite de Laplace L, n'ayant aucun lien particulier avec Q. Nous représenterons par

$$\ldots, U^{n-1}, \ldots, U^{-1}, U, U^1, \ldots, U^n, \ldots \qquad (L)$$

les points de la suite L, les variables étant u,v et chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des v.

Une demi-quadrique de l'espace S_3, c'est-à-dire le système des génératrices rectilignes d'un mode de la quadrique, est représentée par la section de Q par un plan σ. La demi-quadrique complémentaire est représentée par le plan σ' conjugué de σ par rapport à Q. Cela nous conduit à considérer la suite de Laplace L' polaire de L par rapport à Q.

Désignons par V^n le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $U^{n-2}U^{n-1}U^nU^{n+1}U^{n+2}$. Nous obtenons ainsi une suite de points

$$\ldots, V^{n-2}, \ldots, V^{-1}, V, V^1, \ldots, V^{n+2}, \ldots \qquad (L')$$

([1]) L. Godeaux, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41). Voir aussi notre mémoire sur la *Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, pp. 1-80).

([2]) L. Godeaux, *Sur quelques familles de Quadriques attachées aux points d'une surface* (Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1929, pp. 213-226). Voir aussi le mémoire cité plus haut.

([3]) Travail présenté en hommage à la mémoire de G. Tzitzeica lors du Colloque organisé en l'honneur de l'éminent géomètre à Bucarest du 26 au 27 septembre 1973.

qui forment une suite de Laplace, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u (¹).

Les plans $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ conjugués par rapport à Q représentent deux demi-quadriques ayant même support, une quadrique Θ_n. Lorsque n varie, nous avons ainsi une suite infinie de quadriques que nous désignerons par Σ et qui est complètement déterminée par la suite de Laplace L.

2. Deux quadriques consécutives Θ_n, Θ_{n+1} de la suite Σ se touchent en quatre points. En effet, désignons par C^1, C^2 les points d'intersection de la droite $U^{n+1}U^{n+2}$ avec Q et par D^1, D^2 ceux de la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ avec Q. A ces points, que nous supposerons distincts par hypothèse, correspondent dans S_3 quatre droites c_1, c_2, d_1, d_2. Les points C^1, D^1 étant conjugués par rapport à Q, la droite C^1D^1 appartient à Q et représente un faisceau de rayons de S_3 contenant les droites c_1, d_1. Des raisonnements analogues permettent de voir que les quatre droites c_1, c_2, d_1, d_2 sont les côtés d'un quadrilatère gauche dont les sommets sont les points (c_1,d_1), (c_1,d_2), (c_2,d_1), (c_2,d_2).

Les quadriques Θ_n, Θ_{n+1} contiennent les droites c_1, c_2, d_1, d_2 et par conséquent se touchent aux sommets du quadrilatère.

Désignons par γ la section de Q par le plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$.

La droite $C^1C^1_u$ appartient au plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et touche Q, par suite γ et enfin la surface (C^1) engendrée par C^1 au point C^1. Par conséquent lorsque u varie, la droite c_1 engendre une réglée qui se raccorde à la quadrique Θ_n le long de c_1. On démontre de même que lorsque v varie, la droite $C^1C^1_v$ touche la surface (C^1) en ce point et que la droite d_1 engendre une réglée se raccordant à Θ_n le long de cette droite.

Par un raisonnement analogue, on démontre que lorsque u ou v varie, la droite d_1 engendre des réglées se raccordant à la quadrique Θ_n le long de d_1. On en conclut que lorsque u et v varient, le point (c_1d_1) appartient à l'enveloppe de la quadrique Θ_n et de la quadrique Θ_{n+1}. On arrive aux mêmes conclusions pour les autres sommets du quadrilatère $c_1c_2d_1d_2$.

(¹) Ce théorème est classique. Pour une démonstration, voir par exemple notre *Remarque sur la théorie des suites de Laplace* (Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1931, pp. 1-8).

Les quadriques Θ_n, Θ_{n+1} se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour chacune des quadriques.

3. Nous allons supposer pour simplifier les notations que n est nul, l'extension des raisonnements au cas où n est quelconque étant immédiate. Les points de rencontre de U^1U^2 et de V^1V^2 avec Q sont respectivement C^1, C^2, D^1, D^2_u.

Les droites $C^1C^1_u$ et C^2C^2 appartiennent au plan UU^1U^2 et se coupent en un point A. Les droites $D^1D^1_v$ et $D^2D^2_v$ appartiennent au plan VV^1V^2 et se coupent en un point B. Les deux plans étant conjugués par rapport à Q, les points A et B sont conjugués par rapport à Q.

Les droites $C^1C^1_v$ et $C^2C^2_v$ appartiennent au plan $U^1U^2U^3$ et se coupent en un point B'. Les droites $D^1D^1_u$ et $D^2D^2_u$ appartiennent au plan $V^1V^2V^3$ et se coupent en un point A'. Les points A',B' sont conjugués par rapport à Q comme les plans qui les contiennent.

L'hyperplan polaire de A par rapport à Q passe par les points C^1, C^2 donc par les points U^1, U^2 et par le plan VV^1V^2. L'hyperplan polaire de B passe par les points V^1, V^2 et par les points U, U^1, U^2. Le conjugué de la droite AB par rapport à Q est donc l'espace $U^1U^2V^1V^2$.

On trouve de même que le conjugué de la droite A'B' est également l'espace $U^1U^2V^1V^2$, donc les points A, B, A', B' sont en ligne droite et par suite:

Les plans tangents aux points C^1, C^2, D^1, D^2 *aux surfaces engendrées par ces points passent par une même droite.*

Observons que les points de rencontre de la droite AB avec Q représentent les diagonales du quadrilatère gauche $c_1c_2d_1d_2$.

4. Considérons les points de rencontre C^{11} et C^{12} de la droite U^2U^3 et ceux D^{11}, D^{12} de la droite V^2V^3 avec l'hyperquadrique Q, points que nous supposerons toujours distincts. Les droites $C^{11}C^{11}_u$ et $C^{12}C^{12}_u$ appartiennent au plan $U^1U^2U^3$ conjugué du plan $V^1V^2V^3$, donc le point de rencontre A_1 de ces droites est conjugué au point A' qui appartient au dernier de ces plans. Il en résulte que sur la droite AA', la polarité par rapport à Q détermine une involution. Nous désignerons par R_1, R_2 les points d'un couple de cette involution.

Les plans U^2U^3A' et $V^1V^2A_1$ sont conjugués par rapport à Q et il leur correspond dans S_3 une quadrique Θ'_1 qui passe par les droites c_{11}, c_{12} homologues de C^{11}, C^{12} et par les droites d_1, d_2. Elle rencontre la quadrique Θ_1 suivant ces droites.

Les plans $U^2U^3R_1$ et $V^1V^2R_2$ sont conjugués par rapport à Q et il leur correspond dans S_3 une quadrique passant par les droites communes à Θ_1, Θ'_1 et appartenant donc au faisceau déterminé par ces quadriques.

Les plans $U^2U^3R_2$ et $V^1V^2R_1$ sont également conjugués et il leur correspond dans S_3 une quadrique du même faisceau, qui correspond à la première dans une involution.

Il convient d'observer que dans le faisceau déterminé par les quadriques, il y a deux quadriques dégénérées en deux plans: les plans $c_{11}d_1$ et $c_{12}d_2$, les plans $c_{11}d_2$ et $c_{12}d_1$. La quadrique est d'autre part irréductible, donc les quadriques du faisceau sont en général irréductibles.

Ce raisonnement se transporte sans modification au cas où la quadrique Θ_1 est remplacée par une quadrique Θ_n. On obtient donc *un système* ∞^2 *de quadriques formé de* ∞^1 *faisceaux.*

5. Considérons le point B_1 de rencontre des droites $D^{11}D_v^{11}$ et $D^{12}D_v^{12}$. Il appartient au plan $V^1V^2V^3$ conjugué du plan $U^1U^2U^3$ qui contient le point B'. Les points B_1 et B' sont donc conjugués par rapport à Q.

Les plans V^2V^3B' et $U^1U^2B_1$ sont conjugués par rapport à Q et il leur correspond dans S_3 une quadrique Θ''_1 qui coupe Θ_1 suivant les droites c_1, c_2 et d_{11}, d_{12} homologues des points D^{11}, D^{12}.

Les quadriques Θ_1, Θ''_1 déterminent un faisceau de quadriques en général irréductibles qui possède des propriétés analogues à celles du faisceau rencontré plus haut.

Les quadriques Θ_1, Θ'_1, Θ''_1 appartiennent à un réseau ayant pour base les sommets des tétraèdres $c_1c_2d_1d_2$ et $c_{11}c_{12}d_{11}d_{12}$.

La substitution de Θ_n à Θ_1 n'entraînant pas de modification dans le raisonnement, on obtient *un système* ∞^3 *de quadriques formé de* ∞^1 *réseaux de quadriques.*

6. Nous allons maintenant considérer un cas particulier du système Σ en supposant que le point A' coïncide avec A et par conséqnent que B' coïncide avec B.

Considérons la droite C^1D^1, qui appartient à Q. Le plan tangent le long de cette droite, lorsque u varie, est le plan C^1D^1A. La réglée engendrée par cette droite possède donc le caractère de développable et il existe un point de rebroussement M sur la droite C^1D^1. La droite MM_u coïncide avec la droite C^1D^1.

Lorsque v varie, le plan tangent le long de C^1D^1 à la réglée engendrée par cette droite est le plan C^1D^1B et il existe sur cette droite un point N tel que la droite NN_v coïncide avec C^1D^1. Les points M et N sont transformés de Laplace l'un de l'autre et appartiennent à une suite de Laplace que nous désignerons par G_{11}.

On démontre de même qu'il existe sur chacune des droites C^1D^2, C^2D^1, C^2D^2 des couples de points qui sont transformés de Laplace l'un de l'autre et que ces points appartiennent à des suites de Laplace que nous désignerons respectivement par G_{12}, G_{21}, G_{22}.

Lorsque A′ *coïncide avec* A (*et* B′ *avec* B), *il existe quatre lignes brisées de Laplace contenant chacune une des droites* C^1D^1, C^1D^2, C^2D^1, C^2D^2.

La droite c_1 touche les surfaces (c_1d_1) et (c_1d_2), qui sont par conséquent les nappes focales de la congruence (c_1). Or les surfaces en question ont pour lignes asymptotiques les courbes u, v donc la congruence (c_1) est une congruence W.

Il en est de même pour les congruences $(c_2,)$ (d_1), (d_2).

Lorsque le point A′ *coïncide avec* A (*et* B′ *avec* B), *les droites* c_1, c_2, d_1, d_2 *engendrent des congruences* W.

7. Lorsque c_1 décrit une congruence W et par conséquent C^1 un réseau conjugué (u,v), le point C^1 appartient à une suite de Laplace inscrite dans la suite L. Par conséquent la droite $C^1C^1_u$ rencontre la droite UU^1 en un point $\overline{C}^1$ et la droite $\overline{C}^1\overline{C}^1_v$ passe par C^1 et par A. D'autre part, le plan $\overline{C}^1C^1C^1_v$ contient la droite $C^1C^1_v$ donc le point B et par conséquent la droite AB.

Si $\overline{C}^2$ est le transformé de Laplace du point C^2 dans le sens des u, la droite AB se trouve également dans le plan $\overline{C}^2C^2C^2_v$. Le point A_v qui doit se trouver dans les deux plans se trouve donc sur la droite AB.

On démontre de même que le point B_u doit se trouver sur la droite AB et que par conséquent les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent à une suite de Laplace que nous désignerons par H.

Lorsque le point A′ *coïncide avec* A (*et* B′ *avec* B), *les points* A, B *sont transformés de Laplace l'un de l'autre.*

Le point C^1 appartient à une suite de Laplace que nous désignerons par G_1. La droite $\overline{C}^1C^1$ passant par A, la suite H est inscrite dans la suite G_1.

Le point C^2 appartient à une suite G_2 qui est également circonscrite à H.

Les points D^1 et D^2 appartiennent également à des suites de Laplace respectivement $G'_1,{}'_2\,G$ et ces suites sont également circonscrites à la suite H.

Observons maintenant que la suite G_1 est inscrite dans les suites G_{11}, G_{12}, la suite G_2 dans les suites G_{21}, G_{22}, la suite G'_1 dans les suites G_{11}, G_{12}, enfin la suite G'_2 dans les suites G_{12}, G_{22}.

On obtient ainsi, dans ce cas particulier, une configuration formée de suites de Laplace.

8. Nous terminerons en ajoutant une simple remarque sur la suite de quadriques que nous avons attachée à une droite d'une congruence W.

Soit (j) une congruence W dont les nappes focales $(x), (\bar{x})$ ont pour lignes asymptotiques les courbes u, v. Aux surfaces $(x), (\bar{x})$ sont attachées dans S_5 deux suites de Laplace respectivement

$$\ldots, V^n, \ldots, V^1, V, U, U^1, \ldots, U^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

$$\ldots, \overline{V}^n, \ldots, \overline{V}^1, \overline{V}, \overline{U}, \overline{U}^1, \ldots, \overline{U}^n, \ldots \qquad \text{(L}')$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v.

La droite j est représentée par le point J d'intersection des droites UV et $\overline{U}\overline{V}$. Il appartient à une suite de Laplace inscrite dans les suites L, L′. Nous désignons par J^n le point de cette suite qui appartient à la droite U^nU^{n+1} et à la droite $\overline{U}^n\overline{U}^{n+1}$.

Désignons par P^n le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J^{n-2}J^{n-1}J^nJ^{n+1}J^{n+2}$. Nous avons montré que ce point était l'intersection des droites $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ et $V^n\overline{V}^n$.

Les plans $J^{n-1}J^nJ^{n+1}$ et $P^{n-1}P^nP^{n+1}$ étant conjugués par rapport à Q, il leur correspond dans S_3 une quadrique W_n.

Observons que le point P^{n-1} appartient à la droite $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$, le point P^n aux droites $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ et $V^n\overline{V}^n$, enfin le point P^{n+1} à la droite $V^n\overline{V}^n$. Il en résulte que le plan $P^{n-1}P^nP^{n+1}$ coïncide avec le plan commun aux droites $V^{n-1}\overline{V}^{n-1}$ et $V^n\overline{V}^n$, qui se rencontrent au point $J^{-(n-1)}$. On en conclut que le point $J^{-(n-1)}$ est le conjugué par rapport à Q des points J^{n-1}, J^n, J^{n+1}.

On prouverait de même que J^{n-1} est le conjugué des points $J^{-(n-1)}, J^{-n}, J^{-(n+1)}$; mais la suite des points J ne peut être autopolaire par rapport à Q.

C'est cette remarque que nous voulions ajouter à nos recherches antérieures sur l'argument (1).

Liège, le 10 juin 1973.

(1) *Réseaux de quadriques associés aux points d'une surface ou aux droites d'une congruence* W (Revue roumaine de Mathématiques pures et appliquées, 1968, pp. 655-660).