SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CORRESPONDANCES RATIONNELLES ENTRE DEUX VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

On sait que si une courbe algébrique C possède une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, la série canonique de cette courbe contient p séries linéaires partielles composées au moyen de l'involution; l'une de ces séries a la dimension $\pi - 1$ et est la transformée de la série canonique de la courbe (de genre π) image de l'involution; les autres séries ont la dimension $\pi - 2$. Si nous considérons au contraire une surface algébrique régulière F possédant une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, le système canonique de cette surface contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution; l'un de ces systèmes a la dimension $\pi_a - 1$ et est le transformé du système canonique de la surface (régulière, de genre arithmétique π_a) image de l'involution; les autres systèmes ont la dimension π_a [1]. Il y a donc une différence essentielle suivant que l'on considère une courbe ou une surface. Cette différence tient-elle à la parité du nombre de dimensions? Nous nous proposons de montrer dans cette Note qu'il faut répondre par l'affirmative à cette question.

Nous commencerons par exposer une nouvelle démonstration du théorème relatif aux surfaces qui vient d'être rappelé, démonstration susceptible d'être étendue aux variétés à plus de deux dimensions. Nous considérons ensuite une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, contenant une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, et nous montrons que son système canonique contient p systèmes

[1] *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, p. 672-679).

linéaires partiels composés au moyen de l'involution. L'un de ces systèmes a la dimension $\pi_a - 1$ et est le transformé du système canonique de la variété image de l'involution; les autres systèmes ont la dimension $\pi_a - 2$. Nous indiquons ensuite l'extension aux variétés algébriques à d dimensions possédant la propriété suivante (qui appartient aux surfaces régulières et aux variétés à trois dimensions complètement régulières). Le système adjoint à un système linéaire de variétés à $d-1$ dimensions découpe, sur l'une de celles-ci, le système canonique complet.

Sur les variétés considérées, nous avons à construire un système linéaire contenant p systèmes linéaires composés au moyen d'une involution. Nous n'avons pas repris ici cette construction que nous avons déjà eu l'occasion de faire pour les surfaces et les variétés à trois dimensions (1).

1. Soient F une surface algébrique régulière contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p, dépourvue de points unis, et Φ une surface, nécessairement régulière, image de cette involution.

Construisons sur F un système linéaire complet, $|C|$, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$, composés au moyen de l'involution I_p, dont le premier au moins soit privé de points-base. Désignons par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_p|$ les systèmes linéaires complets de Φ qui correspondent respectivement à $|C_1|$, $|C_2|, \ldots, |C_p|$.

Si π et n sont le genre et le degré du système $|\Gamma_1|$, le système $|C|$ a le genre $p(\pi-1)+1$ et le degré pn. Il en résulte que les systèmes $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_p|$ ont le genre π et le degré n.

Soient $|C'|$ l'adjoint au système $|C|$, p_a le genre arithmétique de la surface F. La surface F étant régulière, les courbes C' découpent, d'après un théorème de M. Castelnuovo, la série canonique complète sur une courbe C. Cette série ayant la dimen-

---

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935); *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un contenant des involutions cycliques* (*Soc. Math. de France;* Conférences de la réunion internationale des Mathématiciens tenue à Paris en 1937; Paris, 1938).

sion $p(\pi - 1)$, le système $|C'|$ a la dimension

$$r' = p_a + p(\pi - 1).$$

D'autre part, si T est la transformation birationnelle de la surface F en elle-même, de période p, génératrice de l'involution I_p, le système adjoint $|C'|$ est transformé en lui-même par T. Il en résulte qu'il contient un certain nombre de systèmes linéaires partiels, $|C'_1|, |C'_2|, \ldots, |C'_t|$ composés au moyen de l'involution $I_p (t \leqq p)$. Ces systèmes découpent, sur une courbe C, des séries partielles appartenant à la série canonique de la courbe envisagée, composées au moyen de l'involution d'ordre p déterminée sur cette courbe par I_p. Or, le nombre de ces séries est égal à p et d'autre part, $|C'|$ découpe sur la courbe C la série canonique complète; on doit donc avoir $t = p$.

D'ailleurs, si nous désignons par $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_p|$ les systèmes de la surface Φ adjoints respectivement aux systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_p|$, leurs transformés sur F appartiennent au système $|C'|$; ce sont les systèmes $|C'_1|, |C'_2|, \ldots, |C'_p|$, rangés dans un certain ordre. Nous supposerons les systèmes numérotés de sorte que $|\Gamma'_i|$ et $C'_i|$ soient homologues.

Les courbes Γ'_1 découpent sur une courbe Γ_1 la série canonique complète, puisque la surface Φ est régulière (Castelnuovo) et le système $|\Gamma'_1|$ a donc la dimension

$$r'_1 = \pi_a + \pi - 1,$$

π_a étant le genre arithmétique de Φ. Le même raisonnement montre que les dimensions $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ de $|\Gamma'_2|, |\Gamma'_3|, \ldots, |\Gamma'_p|$ sont égales à r'_1. On doit d'ailleurs avoir

$$r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_p + p = r' + 1;$$

d'où l'on déduit

$$p(\pi_a + 1) = p_a + 1,$$

relation connue entre les genres arithmétiques de Φ et F.

Les courbes C'_2 découpent sur une courbe C_1 une série comprise dans la série canonique à laquelle correspond, sur la courbe Γ_1 homologue, une série non spéciale d'ordre $2\pi - 2$, c'est-à-dire une série $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$. Le système $|\Gamma_2|$ découpe donc, sur une courbe Γ_1, une série complète de dimension $\pi - 2$ et par suite le système

$|\Gamma'_2 - \Gamma_1|$ a la dimension $r'_2 - (\pi - 1) = \pi_a$. Le même raisonnement montre que les systèmes $|\Gamma'_3 - \Gamma_1|$, $|\Gamma'_4 - \Gamma_1|$, ..., $|\Gamma'_p - \Gamma_1|$ ont aussi la dimension π_a.

Si le système canonique de Φ et par suite celui de F existent, on voit donc que *le système canonique de* F *contient* p *systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution* I_p; *l'un de ces systèmes a la dimension* $\pi_a - 1$ *et est le transformé du système canonique de* Φ; *les* $p-1$ *autres ont la dimension* π_a.

2. Soient V une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, possédant une involution cyclique I_p d'ordre premier p, privée de points unis; T la transformation birationnelle de V en elle-même génératrice de l'involution I_p; Ω une variété image de cette involution.

Construisons sur V un système linéaire complet de surfaces $|F|$, simple, contenant p systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$, composés au moyen de l'involution I_p, dont le premier soit dépourvu de points-base.

Soient $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_p|$ les systèmes linéaires complets de surfaces de la variété Ω qui correspondent respectivement aux systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$. Désignons par n le degré du système $|\Phi_1|$, par π son genre sectionnel, c'est-à-dire le genre de la courbe (Φ_1, Φ_2) commune à deux surfaces du système, par π_a le genre arithmétique des surfaces Φ_1. Le système $|F|$ a le degré pn, le genre sectionnel $p(\pi - 1) + 1$ et les surfaces F le genre arithmétique $p(\pi_a + 1) - 1$. Les systèmes $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$ ont les mêmes caractères que le système $|\Phi_1|$.

Soit $|F'|$ l'adjoint du système $|F|$. M. Severi a démontré que le défaut du système (canonique) découpé sur une surface F par le système adjoint $|F'|$ est au plus égal à la somme des deux irrégularités de la variété V [1]. Par hypothèse, la variété V est complètement régulière, c'est-à-dire que ses deux irrégularités sont nulles; par suite, le système $|F'|$ découpe sur une surface F le système canonique complet. D'autre part, l'irrégularité superficielle de V étant nulle, les surfaces F sont régulières d'après un

---

(1) Severi, *Fondamenti per la Geometria sulle varieta algebriche* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXVIII, 1909). *Voir* n° 20.

théorème de MM. Castelnuovo et Enriques [1]. Si donc P_a désigne le genre arithmétique de la variété V, la dimension du système $|F'|$ est

$$r' = P_a + p(\pi_a + 1) - 2.$$

Le système $|F'|$ est transformé en lui-même par T et contient donc un certain nombre de systèmes linéaire partiels composés au moyen de l'involution I_p. Le nombre de ces systèmes est égal à celui des systèmes d'une surface F_1 composés au moyen de l'involution I_p, appartenant au système canonique de cette surface. Observons que nous pouvons toujours supposer π_a aussi grand qu'on le veut; il suffit de remplacer $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi. Cela étant, le système canonique d'une surface F_1 contient p systèmes linéaires composés au moyen de I_p, par conséquent le système $|F'|$ contiendra p systèmes linéaires composés au moyen de I_p. A ces systèmes correspondent sur Ω p systèmes linéaires qui sont les adjoints aux systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_p|$. Nous les désignerons respectivement par $|\Phi'_1|$, $|\Phi'_2|$,..., $|\Phi'_p|$ et par $|F'_1|$, $|F'_2|$,..., $|F'_p|$ leurs correspondants sur V.

D'après ce que nous avons vu plus haut, le système $|F'_1|$ découpe sur une surface F_1 un système linéaire (partiel) de dimension $\pi_a - 1$, par conséquent le système $|\Phi'_1|$ découpe sur une surface Φ_1 un système de même dimension, c'est-à-dire le système canonique complet de cette surface. Il en résulte que si Π_g désigne le genre géométrique de la variété Ω, la dimension de $|\Phi'_1|$ est égale à

$$r'_1 = \Pi_g + \pi_a - 1.$$

En effet, les surfaces F étant régulières, il en est de même des surfaces Φ_1, Φ_2, ..., Φ_p et le système canonique de ces surfaces a la dimension $\pi_a - 1$. Le même raisonnement montre que les dimensions r'_2, r'_3, ..., r'_p de $|\Phi'_2|$, $|\Phi'_3|$, ..., $|\Phi'_p|$ sont égales à r'_1. La relation

$$r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_p + p = r' + 1$$

---

[1] CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1906, p. 339-366).

donne

$$p(\Pi_g - 1) = P_a - 1.$$

D'autre part, dans une correspondance $(1, p)$ entre deux variétés à trois dimensions, correspondance privée de points de diramation, on a [1], Π_a étant le genre arithmétique de Ω,

$$p(\Pi_a - 1) = P_a - 1.$$

On en conclut que la variété Ω, comme la variété V, est complètement régulière ($\Pi_a = \Pi_g$).

Considérons le système linéaire $|\Phi'_2 - \Phi_1|$. Comme nous l'avons vu plus haut, les surfaces Φ'_2 découpent, sur une surface Φ_1, un système linéaire de dimension π_a, par conséquent, la dimension du système $|\Phi'_2 - \Phi_1|$ est égale à

$$r'_2 - (\pi_a + 1) = \Pi_a - 2.$$

Les systèmes $|\Phi'_3 - \Phi_1|, \ldots, |\Phi'_p - \Phi_1|$ ont la même dimension.

Par conséquent, si le système canonique de Ω et par suite celui de V existent, *le système canonique de* V *contient* p *systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution* I_p; *l'un de ces systèmes a la dimension* $\Pi_a - 1$ *et est le transformé du système canonique de* Ω; *les* $p - 1$ *autres systèmes ont la dimension* $\Pi_a - 2$.

3. Les raisonnements précédents peuvent s'appliquer aux involutions cycliques privées de points unis, d'ordre premier p, appartenant à une variété algébrique V_d à d dimensions, sur laquelle le système adjoint à un système linéaire de variétés à $d - 1$ dimensions découpe, sur une variété de ce système, le système canonique complet.

Soit Ω_d la variété à d dimensions image d'une des involutions considérées. Si π_g est le genre géométrique de cette variété et si son système canonique existe, on voit que le système canonique de V_d contient p systèmes partiels composés au moyen de l'involution; l'un de ces systèmes, de dimension $\pi_g - 1$, est le trans-

---

[1] G. Tafani, *Sulle corrispondenze* (1, *n*) *tra varietà a* 3 *dimensioni* (*Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa*, 1913).

formé du système canonique de Ω. Les $p-1$ autres systèmes ont la dimension π_g ou la dimension $\pi_g - 2$, suivant que d est pair ou impair.

Entre π_g et le genre géométrique p_g de la variété V, on a la relation

$$p_g + (-1)^d = p[\pi_g + (-1)^d].$$

Ces propriétés s'établissent de proche en proche.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. LXII, octobre 1938.)