Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 11 décembre 1943, nº 12.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction d'une surface d'irrégularité trois,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans une note récente [1], nous avons construit une surface irrégulière de genres $p_g = 4$, $p_a = 1$, $p^{(1)} = 13$, en partant de la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois et en appliquant un théorème que nous avions établi antérieurement [2]. Nous nous proposons dans cette note de construire une surface irrégulière de mêmes genres, qui semble birationnellement distincte de la première.

Nous partons d'une courbe de genre cinq possédant une involution d'ordre deux et de genre trois, par conséquent dépourvue de points unis. La surface F, qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe de genre cinq [3], contient une involution du second ordre ayant une courbe unie de genre trois ; celle-ci représente les couples de points de l'involution

(1) *Construction d'une surface algébrique irrégulière* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1943, pp. 408-422).

(2) *Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière* (Bull. des Sciences mathématiques, 1943, pp. 145-158).

(3) On trouvera les propriétés des surfaces représentant les couples de points d'une courbe dans les mémoires suivants : M. De Franchis, *Sulle varietà ∞² delle coppie di punti di due o di una curva algebrica* (Rend. Circ. Matematico di Palermo, 1903, pp. 104-121) ; F. Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie R. Accad. di Torino, 1903, pp. 1-49) ; *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti R. Accademia di Torino, 1902, pp. 185-200).

donnée sur la courbe de genre cinq. Nous établissons que la surface Φ, image de cette involution, est irrégulière et a les genres $p_g = 4$, $p_a = 1$, $p^{(1)} = 13$. Elle contient à son tour une involution du second ordre, privée de points unis, dont l'image est la surface F′ qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois (la courbe qui représente l'involution donnée sur la courbe du genre cinq).

La surface Φ contient un système simplement infini de degré et d'indice deux, de courbes de genre cinq, dont l'enveloppe se compose de deux courbes de genre trois, ne se rencontrant pas. L'une de ces courbes est la courbe de diramation pour la correspondance (1,2) existant entre les surfaces Φ et F. Les couples de points communs à deux courbes du système forment l'involution ayant F′ pour image [1].

1. Soit G′ une courbe plane du quatrième ordre et de genre trois ; elle est de 63 manières l'enveloppe d'un système ∞^1 d'indice deux de coniques. Soit

$$\lambda^2 \alpha_2(x_0, x_1, x_2) + 2\lambda\beta_2(x_0, x_1, x_2) + \gamma_2(x_0, x_1, x_2) = 0$$

l'équation d'un de ces systèmes, α_2, β_2, γ_2 étant des formes du second degré. La courbe G′ a pour équation

$$[\beta_2(x_o, x_1, x_2)]^2 - \alpha_2(x_o, x_1, x_2)\gamma_2(x_o, x_1, x_2) = 0.$$

Elle est l'image d'une involution du second ordre j_2 appartenant à la courbe G, de S_4, d'équations

$$x_3^2 = \alpha_2, \quad x_3 x_4 = \beta_2, \quad x_4^2 = \gamma_2.$$

(1) D'une manière générale, si l'on considère sur une courbe C de genre π une involution cyclique d'ordre p et de genre π', la surface F, qui représente les couples de points de C, contient une involution cyclique d'ordre p dont l'image est une surface d'irrégularité π'. Cette surface contient à son tour une involution d'ordre p, non cyclique, ayant pour image la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre π'. Voir, pour $p > 2$, notre note *Sur certaines surfaces algébriques irrégulières* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1933, pp. 674-680).

La courbe G, d'ordre huit, est de genre cinq. L'involution j_2 est déterminée sur cette courbe par l'homographie biaxiale harmonique

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_0 : x_1 : x_2 : - x_3 : - x_4. \qquad (1)$$

Les axes de cette homographie sont la droite s d'équations

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

et le plan σ d'équations

$$x_3 = x_4 = 0.$$

L'involution j_2 est dépourvue de points unis.

2. Désignons par F la surface qui représente les couples de points de la courbe G et par F′ celle qui représente les couples de points de la courbe G′.

Considérons un couple de points P_1, P_2 de G et soit (P_1P_2) le point qui lui correspond sur F. Soient P_1', P_2' les points qui, avec P_1, P_2 respectivement, forment des couples de j_2. Le point (P_1', P_2') de F qui représente les points P_1', P_2' de G correspond à (P_1P_2) dans une transformation birationnelle involutive T de F en elle-même.

La transformation T engendre sur F une involution I_2 d'ordre deux possédant une courbe unie, lieu des points images des couples de l'involution j_2. Nous désignerons cette courbe par H. Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I_3.

Aux couples P_1, P_1' et P_2, P_2' de j_2 correspondent sur G′ deux points R_1, R_2, représentés par le point (R_1R_2) de F′. A ce point correspondent sur F les quatre points (P_1P_2), $(P_1'P_2')$, (P_1P_2') et $(P_1'P_2)$. Lorsque le point (R_1R_2) varie sur F′, ces quatre points engendrent une involution J_4 du quatrième ordre sur F. L'involution J_4 est composée au moyen de l'involution I_2, le groupe de quatre points considéré contient en effet deux couples (P_1P_2) et $(P_1'P_2')$, (P_1P_2') et $(P_1'P_2)$ de I_2. Il en résulte qu'à l'involution J_4 correspond sur la surface Φ une involution I'_2 d'ordre deux, ayant pour image la surface F'.

L'involution I'_2 est dépourvue de points unis, car l'existence de tels points entraînerait celle de points unis de l'involution j_2 sur G.

3. Nous prendrons, comme modèle projectif de la surface F, la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques, qui a été construite par M. Severi.

Les sections hyperplanes de la courbe G, d'ordre huit et de genre cinq, de S_4, forment la série canonique complète de cette courbe. Les courbes canoniques C de F correspondent aux systèmes de bisécantes de G appartenant à des complexes linéaires. En rapportant projectivement les ∞^9 complexes linéaires de S_4 aux hyperplans d'un espace S_9, on obtient une variété W_6^5, d'ordre cinq, représentant les droites de S_4. La surface F est tracée sur cette variété ; on sait (Severi, De Franchis), qu'elle a les caractères

$$p_g = 10, \quad p_a = 5, \quad p^{(1)} = 45.$$

La surface F est donc d'ordre 44.

Désignons par

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \qquad (i < k,\ i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

les coordonnées d'une droite de S_4. L'homographie (1) détermine entre les droites de S_4 et par conséquent dans l'espace S_9, l'homographie

$$\frac{p'_{01}}{p_{01}} = \frac{p'_{02}}{p_{02}} = \frac{p'_{03}}{-p_{03}} = \frac{p'_{04}}{-p_{04}} = \frac{p'_{12}}{p_{12}} = \frac{p'_{13}}{-p_{13}}$$
$$= \frac{p'_{14}}{-p_{14}} = \frac{p'_{23}}{-p_{23}} = \frac{p'_{24}}{-p_{24}} = \frac{p'_{34}}{p_{34}}. \tag{2}$$

L'involution I_2 est engendrée, sur la surface F, par cette homographie biaxiale harmonique, dont les axes sont : un espace σ_3 d'équation

$$p_{01} = p_{02} = p_{12} = p_{34} = 0 \tag{3}$$

et un espace σ_3 d'équations

$$p_{03} = p_{04} = p_{13} = p_{14} = p_{23} = p_{24} = 0.$$

La courbe H, unie pour l'involution I_2, correspond à la réglée des bisécantes de G s'appuyant sur les axes s et σ de l'homographie (1). Cette réglée a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_2 & \beta_2 & x_3 \\ \beta_2 & \gamma_2 & x_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

et est du huitième ordre, car un hyperplan passant par σ coupe la réglée suivant la courbe d'ordre quatre de celle-ci située dans σ et suivant quatre génératrices, passant par un même point de la droite s. Celle-ci est quadruple pour la réglée.

Un plan de S_4 coupe la réglée en huit points, donc le complexe lieu des droites de S_4 s'appuyant sur ce plan contient huit génératrices de la réglée. On en conclut que la courbe H est d'ordre huit.

Observons que les droites de S_4 s'appuyant sur s et sur σ sont représentées sur la variété W_6^5 par les points d'une variété de Segre V_3^3. Cette variété, qui contient H, appartient à σ_5, car les droites en question satisfont aux équations (3).

La courbe H, qui est de genre trois, est normale dans σ_5.

4. Les courbes canoniques Γ de la surface Φ correspondent aux sections de la surface F par les hyperplans passant par σ_5, c'est-à-dire aux courbes canoniques de F contenant la courbe H comme partie. Le genre géométrique de Φ est donc $p_g = 4$.

D'autre part, nous avons remarqué que Φ contient une involution I'_2, dépourvue de points unis, dont F' est l'image. Entre les genres arithmétiques p_a de Φ et p'_a de F', nous avons donc la relation [1]

$$12(p_a + 1) = 2 \times 12(p'_a + 1).$$

Or, actuellement, on a $p'_a = 0$, donc Φ a le genre arithmétique $p_a = 1$.

Entre le genre linéaire $p^{(1)}$ de Φ et celui, $p'^{(1)}$ de F', nous avons la relation [2]

$$p^{(1)} - 1 = 2(p'^{(1)} - 1).$$

On sait que l'on a $p'^{(1)} = 7$, donc $p^{(1)} = 13$.

La surface Φ a donc les caractères

$$p_g = 4, \; p_a = 1, \; p^{(1)} = 13.$$

Désignons par x le genre de la courbe C — H sur la surface F et par y le nombre de points de rencontre de cette courbe avec H. En exprimant que le genre de la courbe (C — H) + H est égal à 45, on trouve

$$x + y = 43.$$

En appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance (1,2) entre une courbe Γ et la courbe C — H homologue, correspondance qui possède y points de diramation, on trouve

$$2x - y = 50,$$

d'où $x = 31$, $y = 12$.

Les courbes C — H, transformées des courbes canoniques Γ de Φ, ont donc le genre 31 et rencontrent H en 12 points.

En exprimant que le degré de la courbe (C — H) + H est égal à 44, on trouve que le degré de la courbe H est égal à — 4, car | C — H | a le degré 24.

---

(1) *Sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312).

(2) *Sur les surfaces algébriques doubles...* (*loc. cit.*).

5. Aux couples de points de G contenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe K, variable dans un système continu $\{K\}$ d'indice deux et de degré un, ayant pour enveloppe la courbe K_0 dont les points représentent les couples de points de G formés de deux points coïncidents.

De même, aux couples de points de G' contenant un point fixe correspondent sur F' les points d'une courbe K', variable dans un système continu $\{K'\}$ de degré un et d'indice deux, ayant pour enveloppe la courbe K'_0 qui représente les couples de points coïncidents de G'.

Considérons un point P_{12} de F et les courbes K_1, K_2 de $\{K\}$ passant par ce point. Les courbes K_1, K_2 touchent K_0 en des points P_1, P_2. La courbe K_0 étant birationnellement identique à G, l'involution j_2 se transporte sur cette courbe et a comme image la courbe K'_0. Soient P_1^*, P_2^* les points que j_2 fait correspondre à P_1, P_2 et K_1^*, K_2^* les courbes K passant respectivement par P_1^*, P_2^*. Les courbes K_1^*, K_2^* se coupent en un point P_{12}^* qui, avec P_{12}, forme un couple de l'involution I_2.

De même, les points d'intersection de K_1, K_2^* et de K_1^*, K_2 forment un couple de I_2. Les quatre points d'intersection de K_1, K_1^* avec K_2, K_2^* forment un groupe de J_4.

Si le point P_2 coïncide avec P_1^* et par suite le point P_2^* avec P_1, les points P_{12}, P_{12}^* coïncident en un point uni de I_2, appartenant à la courbe H. Les points P_1, $P_1^* \equiv P_2$ forment un couple de I_2 ; les points P_1, P_1^* et le point P_{12} compté deux fois forment un quaterne de J_2.

La courbe H ne rencontre pas la courbe K_0.

Considérons une courbe K_1 touchant K_0 en P_1 et la courbe K_1^* touchant K_0 au point P_1^* que j_2 fait correspondre à P_1. Les courbes K_1, K_1^* se correspondent dans I_2 et à leur ensemble correspond sur Φ une courbe $\overline{K}_1$.

La courbe $\overline{K}_1$ appartient à un système continu $\{\overline{K}\}$ d'indice deux et de degré deux ; en effet, si l'on considère, utre $\overline{K}_1$, la courbe $\overline{K}_2$ qui correspond à l'ensemble des courbes K_2, K_2^*, les courbes $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ ont en commun les deux points qui correspondent aux deux couples de I_2 considérés plus haut. De plus, les deux points communs aux courbes $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ forment un couple de l'involution I_2'.

A la courbe K_0 correspond sur Φ une courbe $\overline{K}_0$, de genre trois, qui fait partie de l'enveloppe du système $\{\overline{K}\}$.

Les courbes K_1, K_1^* se coupent en un point de la courbe unie H. Si l'on désigne par $\overline{H}$ la courbe de Φ homologue de H, il en résulte que la courbe $\overline{K}_1$ touche la courbe $\overline{H}$. L'enveloppe du système $\{\overline{K}\}$ est donc formée des courbes $\overline{K}_0$ et $\overline{H}$.

De plus, les points de contact d'une courbe $\overline{K}$ avec $\overline{K}_0$ et $\overline{H}$ forment un couple de I_2' et à la courbe $\overline{K}_0 + \overline{H}$ correspond sur F' la courbe $\overline{K}_0'$.

Aux courbes $\overline{K}$ correspondent les courbes $\overline{K}'$. Les courbes $\overline{K}$ sont d'ailleurs, comme les courbes K, de genre cinq.

Liége, le 6 décembre 1943.