Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 9 octobre 1943, n°s 10-11.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une propriété des surfaces de genres un et de rang deux,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans des recherches antérieures [1], nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) soit l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un également. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) *est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, elle est l'image d'involutions du second ordre appartenant à d'autres surfaces de genres un.*

Pour établir ce théorème, nous utilisons le théorème de Bachet, suivant lequel un nombre entier positif est la somme de quatre carrés au plus [2]. La surface donnée peut être ramenée, par une transformation birationnelle, à une surface normale d'ordre $2\pi - 2$, à sections de genre π, appartenant à un espace linéaire à π dimensions,

[1] *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1914, pp. 357-430 ; 1919, pp. 51-70) ; *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312) ; *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Act. scient. et ind.), Paris, Hermann, 1935.

[2] Le théorème de Bachet a déjà été utilisé dans ce sens par M. Severi, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero* (Atti R. Istituto Veneto, 1908-1909, pp. 249-260).

possédant huit points doubles coniques. Nous montrons que l'on peut transformer birationnellement la surface soit en une surface du quatrième ordre sur laquelle les points doubles, ou un certain nombre d'entre eux, sont remplacés par des courbes rationnelles, soit en un plan double.

En utilisant la première transformation, on peut seulement démontrer le théorème énoncé dans les hypothèses $\pi > 3$, $\pi - 3$ pouvant se mettre sous la forme d'une somme de huit carrés au plus, la somme de ces huit nombres étant paire. De plus, la surface doit être dépourvue de faisceaux de courbes elliptiques (1). En employant la seconde transformation, on démontre au contraire le théorème sans restriction.

En même temps, nous établissons que :

Si une surface de genres un possède des points doubles coniques, elle admet au moins une transformée birationnelle possédant le même nombre de points doubles coniques, l'un au moins de ceux-ci correspondant à une courbe (rationnelle) de la première surface.

Si une surface de genres un représente une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, elle contient des involutions rationnelles du second ordre.

Une surface F de genres un, image d'une involution du second ordre appartenant à une surface Ψ de genres un, est donc également l'image d'une involution du second ordre appartenant à une autre surface de genres un Ψ'. Entre les surfaces Ψ, Ψ' existe par suite une correspondance (2,2). Les couples de points homologues dans cette correspondance sont représentés par les points d'une surface G qui paraît posséder quelques propriétés intéressantes. Nous en indiquons sommairement une, nous réservant de revenir sur cet objet.

(1) Nous avions déjà obtenu cette propriété sous une forme moins précise dans une note *Sur les surfaces du quatrième ordre contenant des courbes rationnelles* (Revista R. Academia, Madrid, 1923).

Les raisonnements utilisés dans cette note peuvent aussi s'appliquer aux surfaces de Kummer généralisées ; nous le montrerons ultérieurement.

1. Soit F une surface normale de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à un espace linéaire S_π à π dimensions. Elle est d'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes C ont le genre π.

Nous avons établi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un sont que :

a) la surface F possède huit points doubles coniques ;

b) parmi les hyperquadriques passant par ces huit points doubles, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.

Chacun des huit points doubles est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$ ces huit courbes rationnelles et par C_0 une courbe le long de laquelle une hyperquadrique passant par ces huit points touche F. Nous avons

$$2C \equiv 2C_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_8.$$

On peut toujours déterminer huit entiers positifs ou nuls $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_8$, tels que

$$\pi - 3 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_8^2. \tag{1}$$

En effet, d'après le théorème de Bachet, tout nombre entier positif $\pi - 3$ est la somme de quatre carrés et par conséquent la somme de huit carrés *au plus*.

Le système linéaire

$$|C_1| = |C - \nu_1\gamma_1 - \nu_2\gamma_2 - \ldots - \nu_8\gamma_8|$$

a le degré

$$2\pi - 2 - 2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_8^2) = 4$$

et par conséquent le genre et la dimension trois.

Supposons en premier lieu le système $|C_1|$ simple et rapportons projectivement ses courbes aux plans d'un espace S_3. A la surface F correspond, dans S_3, une surface du quatrième ordre F_1.

2. A la courbe γ_1 correspond sur F_1 une courbe rationnelle d'ordre $2\nu_1$ et de degré -2, que nous désignerons toujours par γ_1. Cette courbe est dépourvue de points multiples.

Les surfaces d'ordre ν_1 de S_3 linéairement indépendantes sont au nombre de $\binom{\nu_1+3}{3}$; il y en a $\binom{\nu_1+3}{3} - \binom{\nu_1-1}{3} = 2\nu_1^2 + 2$, linéairement indépendantes, ne contenant pas F_1, si $\nu_1 \geqslant 4$. Cette formule est encore valable si $\nu_1 < 4$. Parmi ces surfaces, il y en a une seule qui contient la courbe γ_1 ; elle rencontre encore F_1 suivant une courbe rationnelle γ_1' d'ordre $2\nu_1$, de degré -2. Les courbes γ_1, γ_1' ont en commun $2(\nu_1^2 + 1)$ points.

De même aux courbes $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_8$ correspondent sur F_1 des courbes respectivement d'ordres $2\nu_2, 2\nu_3, \dots, 2\nu_8$, que nous continuerons à désigner par les mêmes symboles. Soient $\gamma_2', \gamma_3', \dots, \gamma_8'$ les courbes rationnelles de degré -2, d'ordres respectifs $2\nu_2, 2\nu_3, \dots, 2\nu_8$ suivant lesquelles les surfaces d'ordres $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_8$ passant par $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_8$ coupent encore F_1.

Nous avons

$$\gamma_1 + \gamma_1' \equiv \nu_1 C_1, \ \gamma_2 + \gamma_2' \equiv \nu_2 C_1, \ \dots, \ \gamma_3 + \gamma_8' \equiv \nu_8 C_1.$$

Si l'un des nombres $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_8$ est nul, la courbe γ correspondante sur F_1 est un point double conique et la courbe γ' correspondante manque.

Des relations précédentes et de

$$C \equiv C_1 + \nu_1\gamma_1 + \nu_2\gamma_2 + \dots + \nu_8\gamma_8,$$

on déduit

$$C \equiv (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \dots + \nu_8^2 + 1)\, C_1 - \nu_1\gamma_1' - \nu_2\gamma_2' \dots - \nu_8\gamma_8'.$$

Les courbes C sont découpées sur la surface F_1 par les surfaces d'ordre $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_8^2 + 1 = \pi - 2$ ayant avec la surface un contact d'ordre $\nu_1 - 1$ le long de γ_1', un contact d'ordre $\nu_2 - 1$ le long de γ_2', ..., un contact d'ordre $\nu_8 - 1$ le long de γ_8'. Ces courbes C ne rencontrent pas les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$.

3. Les courbes C_0, de genre $\pi - 2$, rencontrant en un point chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$, donnent lieu sur F_1 à la relation fonctionnelle

$$2C_0 \equiv 2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_8^2 + 1)C_1 - 2(\nu_1\gamma_1' + \nu_2\gamma_2' + \ldots + \nu_8\gamma_8') - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_8.$$

Il doit donc exister des surfaces d'ordre $2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_8^2 + 1) = 2(\pi - 2)$, ayant avec F_1 des contacts d'ordres $2\nu_1 - 1$ le long de γ_1', $2\nu_2 - 1$ le long de γ_2', ..., $2\nu_8 - 1$ le long de γ_8', passant par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$ et touchant F_1 le long d'une courbe d'ordre

$$2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_8^2) - (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_8) + 4 = 2\pi - (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_8) - 2.$$

Considérons les courbes

$$C_0' \equiv C_0 - (\nu_1 - 1)\gamma_1 - (\nu_2 - 1)\gamma_2 - \ldots - (\nu_8 - 1)\gamma_8.$$

D'après la relation précédente, nous avons

$$2C_0' \equiv 2C_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_8,$$

ou encore

$$2C_0' \equiv (\nu + 2)C_1 - \gamma_1' - \gamma_2' - \ldots - \gamma_8',$$

en posant

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_8.$$

Il doit donc exister des surfaces d'ordre $\nu + 2$, passant par $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_8'$, touchant la surface F_1 suivant des courbes C_0' d'ordre $\nu + 4$.

Le système $|C_0'|$ a le degré 2ν et par suite le genre $\nu + 1$.

Ces résultats sont encore valables si quelques-uns des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_8$ sont nuls, mais alors les surfaces d'ordre $\nu + 2$ doivent passer par les points doubles correspondants.

4. Considérons les courbes $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2$; les courbes γ_1, γ_2 ne se rencontrent pas.

La surface d'ordre ν_1 passant par γ_1, γ'_1, coupe γ_2 en $2\nu_1\nu_2$ points qui ne peuvent appartenir à γ_1 et qui par conséquent appartiennent à γ'_1. La même surface coupe γ'_2 en $2\nu_1\nu_2$ points qui appartiennent à γ_1, donc γ'_1 et γ'_2 ne se rencontrent pas.

Plus généralement, les courbes γ_i, γ'_k se coupent en $2\nu_i\nu_k$ points ; les courbes γ'_i, γ'_k ne se rencontrent pas.

Cela étant, considérons les surfaces d'ordre $\pi - 2$ ayant avec la surface F_1 des contacts d'ordre $\nu_1 - 1$ le long de γ_1, d'ordre $\nu_2 - 1$ le long de γ_2, ..., d'ordre $\nu_8 - 1$ le long de γ_8. Désignons par D les courbes que ces surfaces découpent sur F_1, de telle sorte que

$$|D| = |(\pi - 2)C_1 - \nu_1\gamma_1 - \nu_2\gamma_2 - \dots - \nu_8\gamma_8| .$$

Les surfaces d'ordre $\pi - 2$ ne contenant pas F_1 dépendent de $2(\pi - 2)^2 + 1$ paramètres ; elles découpent sur F_1 le système $|(\pi - 2)C_1|$. Le passage par γ_1 impose $2(\pi - 2)\nu_1 + 1$ conditions. Les courbes $(\pi - 2)C_1 - \gamma_1$ coupent γ_1 en $2[(\pi - 2)\nu_1 + 1]$ points et le contact le long de γ_1 impose donc $2[(\pi - 2)\nu_1 + 1] + 1$ nouvelles conditions. Et ainsi de suite. Le contact d'ordre $\nu_1 - 1$ le long de γ_1 impose en finde compte

$$\nu_1[2(\pi - 2)\nu_1] + 2(0 + 1 + \dots + \nu_1 - 1) + \nu_1 = [2(\pi - 2) + 1]\nu_1^2$$

conditions. La dimension du système $|D|$ sera donc égale à

$$2(\pi - 2)^2 + 1 - [2(\pi - 2) + 1](\nu_1^2 + \nu_2^2 + \dots + \nu_8^2) = \pi$$

Le système $|D|$ est donc de dimension π, de genre π et de degré $2\pi - 2$. En rapportant projectivement les courbes D aux hyperplans d'un espace linéaire S_π à π dimensions, F_1 se transforme en une surface F', normale, de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Les courbes D rencontrent les courbes C_1 en $2\pi - 2$ points, les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$ respectivement en $(2\pi - 2)\nu_1$, $(2\pi - 2)\nu_2$, ..., $(2\pi - 2)\nu_8$ points ; elles ne rencontrent pas les courbes $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_8'$. Par conséquent, à ces courbes correspondent des points doubles coniques de la surface F'. Ainsi F', qui est birationnellement équivalente à F, possède comme cette surface huit points doubles coniques.

Si un des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_8$ est nul, la courbe γ' et la courbe γ correspondantes coïncident en un point double de F_1. Si $\pi > 3$, il y a au moins un des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_8$ non nul et par conséquent les points doubles de F, F' ne se correspondent pas tous.

5. Supposons qu'il existe sur la surface F_1 une courbe D_0', d'ordre $\nu + 4$, de genre $\nu + 1$ et de degré 2ν, satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$2D_0' \equiv (\nu + 2)C_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_8. \qquad (2)$$

Le système $|C_0' + D_0'|$ donne

$$\begin{aligned} 2(C_0' + D_0') &\equiv 2(\nu + 2)C_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_8 \\ &\qquad - \gamma_1' - \gamma_2' - \ldots - \gamma_8' \\ &\equiv (\nu + 4)C_1. \end{aligned}$$

Si

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_8 = 2\nu'$$

est pair, on a

$$C_0' + D_0' = (\nu' + 2)C_1.$$

Le système $|D_0'|$ est donc découpé sur F_1 par les surfaces d'ordre $\nu' + 2$ passant par une courbe C'_0 ; ce système existe donc et donne lieu à la relation fonctionnelle (2).

Formons alors le système

$$|D_o| = |D'_o + (\nu_1 - 1)\gamma'_1 + (\nu_2 - 1)\gamma'_2 + \ldots + (\nu_8 - 1)\gamma'_8|.$$

On trouve facilement, en utilisant les relations fonctionnelles précédentes,

$$2D_o \equiv 2D - \gamma'_1 - \gamma'_2 - \ldots - \gamma'_8.$$

Par conséquent, sous les conditions imposées :

a) le système $|C_1|$ est simple,

b) $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_8$ est pair,

la surface F′ est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un.

En d'autres termes, F est l'image de deux involutions du second ordre appartenant à deux surfaces de genres un distinctes, puisque les groupes de points de diramation sont distincts.

La condition ν pair est certainement vérifiée si π est impair. En effet, $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ est alors un entier égal, d'après le théorème de Bachet, à une somme de quatre carrés en plus. Soient $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ les nombres ainsi trouvés. Il suffit de prendre

$$\nu_5 = \nu_1, \; \nu_6 = \nu_2, \; \nu_7 = \nu_3, \; \nu_8 = \nu_4.$$

Nous avons supposé le système $|C_1|$ simple. S'il en est autrement, la surface F_1 se réduit à une quadrique (éventuellement conique) double. Aux génératrices de la quadrique, correspondent sur F des courbes elliptiques, car la courbe de diramation de la quadrique est découpée sur celle-ci par une surface du quatrième ordre.

6. Nous allons montrer que lorsque ν est impair, le théorème n'est plus vrai au moins dans un cas.

Supposons $\pi = 4$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = \ldots = \nu_8 = 0$. La surface F_1 contient une conique γ_1 et sept points doubles coniques $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_8$. La courbe γ_1' est une conique, qui, avec γ_1, forme une section plane C_1 de la surface.

On a

$$2\,C_0 \equiv 3C_1 - \gamma_1' - \gamma_2 - \gamma_3 - \ldots - \gamma_8.$$

Il existe donc des surfaces cubiques passant par la conique γ_1' et par les sept points doubles, touchant F_1 le long de quintiques C_0 de genre deux.

Les courbes C_0 touchent γ_1 en un point et d'autre part sont en nombre ∞^2. Il existe donc une courbe C_0 passant par deux points de γ_1 et contenant par suite cette conique. Considérons la courbe

$$2K \equiv 2(C_0 - \gamma_1) \equiv 2C_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_8.$$

Il existe donc une quadrique passant par la conique γ_1, par les sept points doubles et touchant F_1 le long d'une cubique gauche K.

Pour établir le théorème, nous devrions prouver l'existence d'une cubique gauche K' donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$2K' \equiv 2C_1 - \gamma_1' - \gamma_2 - \ldots - \gamma_8,$$

c'est-à-dire l'existence d'une quadrique passant par la conique γ_1', par les sept points doubles et touchant F_1 le long de la cubique gauche K'.

Soient Q, Q' les quadriques touchant F_1 le long de K et de K'. Les surfaces F_1 et $Q + Q'$ déterminent un faisceau de surfaces du quatrième ordre ayant en commun sept points doubles, les coniques γ_1, γ_1' et se touchant le long des cubiques K, K'. Il existe une surface de ce faisceau contenant le plan des coniques γ_1, γ_1'; elle est complétée par une surface cubique ayant sept points doubles et ayant par conséquent une droite double contenant ces points. Cette conclusion est absurde, car F_1 aurait elle-même une droite double.

7. En vertu du théorème de Bachet, il est toujours possible de trouver huit entiers positifs ou nuls, μ_1, μ_2, ..., μ_8, vérifiant la relation

$$\pi - 2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_8^2.$$

Le système linéaire

$$|\Gamma| = |C - \mu_1\gamma_1 - \mu_2\gamma_2 - \ldots - \mu_8\gamma_8|$$

a le degré

$$2\pi - 2 - 2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_8^2) = 2$$

et par conséquent le genre et la dimension égaux à deux. En rapportant projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan σ, on transforme F en un plan double Φ ayant pour courbe de diramation une sextique Δ.

Désignons par T la transformation birationnelle involutive de F en soi, génératrice de l'involution déterminée par le réseau $|\Gamma|$.

Supposons en premier lieu que la courbe γ_1 soit transformée en elle-même par T. Cette courbe est rencontrée en 2 μ_1 points par les courbes Γ ; il lui correspond donc dans le plan double Φ une courbe δ_1 d'ordre μ_1, nécessairement rationnelle, comme la courbe γ_1. La transformation T détermine sur γ_1 une involution qui possède deux points unis, par conséquent la courbe δ_1 doit rencontrer la courbe de diramation δ_1 en deux points, ce qui est impossible, donc γ_1 n'est pas transformée en elle-même par T.

Soit γ_1' la courbe rationnelle de F que T fait correspondre à la courbe γ_1. A la courbe $\gamma_1 + \gamma_1'$, correspond sur Φ une courbe rationnelle δ_1, d'ordre $2\mu_1$, tangente en $6\mu_1$ points à la courbe de diramation Δ.

De même T fait correspondre aux courbes $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_8$ des courbes $\gamma_2', \gamma_3, \ldots, \gamma_8'$, distinctes des premières, et aux courbes $\gamma_2 + \gamma_2'$, $\gamma_3 + \gamma_3'$, ..., $\gamma_8 + \gamma_8'$ correspondent sur Φ des courbes rationnelles $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_8$, d'ordres $2\mu_2$, $2\mu_3$. ..., $2\mu_8$, tangentes à la courbe de diramation Δ en chaque point d'intersection.

En particulier, si l'un des nombres μ est nul, à la courbe γ correspondante correspond un point double de la courbe de diramation Δ, n'appartenant à aucune des courbes δ.

A chacun des 6 μ_1 points de contact de δ_1 avec Δ correspond un point commun aux courbes γ_1, γ'_1. D'autre part, δ_1, d'ordre $2\mu_1$, étant rationnelle, possède $\frac{1}{2}(2\mu_1 - 1)\,(2\mu_1 - 2)$ points doubles. Chacun de ceux-ci provient d'un couple de points commun à γ_1, γ'_1 et transformé en lui-même par T. Il en résulte que les courbes γ_1, γ'_1 ont en commun $4\mu_1^2 + 2$ points.

Les courbes δ_i, δ_k se rencontrent en $4\mu_i\mu_k$ points. Les courbes γ_i, γ_k ne pouvant se rencontrer, à ces points correspondent $4\mu_i\mu_k$ points communs à γ_i, γ'_k et $4\mu_i\mu_k$ points communs à γ'_i, γ_k. Par conséquent, les courbes γ'_i, γ'_k ne se rencontrent pas.

8. Aux courbes C, la transformation T fait correspondre des courbes C′ données par

$$C' \equiv \Gamma + \mu_1\gamma'_1 + \mu_2\gamma'_2 + \ldots + \mu_8\gamma'_8.$$

Observons que la courbe δ_i appartient au système linéaire déterminé par les courbes doubles d'ordre $2\mu_1$, par conséquent, on a

$$\gamma_1 + \gamma'_1 \equiv 2\mu_1\Gamma$$

et, de même

$$\gamma_2 + \gamma'_2 \equiv 2\mu_2\Gamma,\ \gamma_3 + \gamma'_3 \equiv \mu_3\Gamma,\ \ldots,\ \gamma_8 + \gamma'_8 \equiv 2\mu_8\Gamma.$$

On a par conséquent

$$C' \equiv (2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 + \ldots + 2\mu_8^2 + 1)\Gamma - \mu_1\gamma_1 - \mu_2\gamma_2 - \ldots - \mu_8\gamma_8,$$

c'est-à-dire

$$C' \equiv (2\pi - 3)\Gamma - \mu_1\gamma_1 - \mu_2\gamma_2 - \ldots - \mu_8\gamma_8.$$

Les courbes C rencontrent les courbes Γ en $2\pi - 2$ points et il en est évidemment de même des courbes C'. Le système $|C'|$ a les mêmes caractères que le système $|C|$, c'est-à-dire le genre π, le degré $2\pi - 2$ et la dimension π.

Aux courbes C et à leurs homologues C' correspondent dans le plan double Φ des courbes d'ordre $2\pi - 2$, touchant la courbe de diramation Δ en $6(\pi - 1)$ points. Ces courbes sont de genre π et possèdent par conséquent $2(\pi^2 - 4\pi + 3)$ points doubles variables. Il en résulte qu'une courbe C et une courbe C' se rencontrent en $2(\pi - 1)(2\pi - 3)$ points.

Les courbes C ne rencontrent pas les courbes γ_1, γ_2, ..., γ_8, par conséquent les courbes C' ne rencontrent pas les courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_8$. Les courbes C' rencontrent les courbes γ_1, γ_2, ..., γ_8 respectivement en $4(\pi - 1)\mu_1$, $4(\pi - 1)\mu_2, \ldots, 4(\pi - 1)\mu_8$ points, et les courbes C rencontrent les courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_8$ respectivement en les mêmes nombres de points.

Rapportons projectivement les courbes C' aux hyperplans d'un espace S_π à π dimensions. A la surface F correspond une surface normale F', de genres un, d'ordre $2\pi - 2$. Aux courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_8$ correspondent des points doubles coniques de la surface F', qui possède donc, comme F, huit points doubles coniques.

Si l'un des nombres μ est nul, le point double correspondant de F se transforme évidemment en un point double de F'.

On observera que, dans ce qui précède, les raisonnements sont indépendants du nombre des points doubles ; on peut donc dire que si F possède α points doubles coniques, la surface F' possède également α points doubles coniques, qui ne sont pas tous les homologues des points doubles de F [1].

---

[1] Pour $\alpha = 3$, $\pi = 1$, on voit que l'on peut transformer une surface du

9. A la courbe C_o, T fait correspondre une courbe C'_o telle que

$$2C'_0 \equiv 2C'_o + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \dots + \gamma'_8,$$

c'est-à-dire telle que

$$2C'_o \equiv [4\pi - 6 - 2(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_8)]\Gamma$$
$$- \mu_1\gamma_1 - \mu_2\gamma_2 - \dots - \mu_8\gamma_8.$$

Les courbes C_o et par conséquent les courbes C'_o rencontrent les courbes Γ en $2\pi - 2 - \mu$ points, où l'on a posé

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_8.$$

A une courbe C_o et à sa transformée C'_o par T correspond dans le plan double Φ une courbe d'ordre $2\pi - 2 - \mu$ tangente à la courbe de diramation Δ en chaque point d'intersection. Cette courbe est de genre $\pi - 2$ et possède

$$2(\pi - 2)^2 - \tfrac{1}{2}\,\mu(4\pi - 7 - \mu)$$

points doubles. On en conclut que les courbes C_o et C'_o se rencontrent en

$$4\pi^2 - 10\pi + 10 - \mu(4\pi - 10 - \mu)$$

points.

Les courbes C_o rencontrent en un point chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8$, donc les courbes C'_o rencontrent en un point chacune des courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_8$. Par conséquent il y a une hyperquadrique touchant la surface F′ le long de chaque courbe C'_o et F′ est donc l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, les points de diramation étant les points $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_8$.

---

quatrième ordre possédant un point double conique en une autre surface du quatrième ordre possédant un point double conique. Celui-ci correspond à la section de la première surface par le cône tangent au point double. Voir à ce sujet une note de M. BURNIAT, *Sur une transformation birationnelle associée à une surface du quatrième ordre ayant deux points doubles coniques* (MÉMOIRES DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÉGE, 1931 et 1932).

En résumé, F est par hypothèse l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface Ψ de genres un, les points de diramation étant $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8$. La surface F' est par conséquent l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface Ψ' de genres un, les points de diramation étant $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_8$. Comme l'un au moins des nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8$ n'est pas nul ($\pi > 2$), l'ensemble des courbes γ diffère de celui des courbes γ' par un élément au moins et Ψ, Ψ' sont distinctes.

10. Il revient au même de dire que la surface F est l'image de deux involutions appartenant aux surfaces Ψ, Ψ', les courbes de diramation étant respectivement

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_8, \quad \gamma'_1 + \gamma'_2 + \dots + \gamma'_8.$$

Pour fixer les idées, supposons que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu^\tau$ ne sont pas nuls, $\mu_{\tau+1}, \dots, \mu_8$ étant nuls ($\tau \geqslant 1$). Entre les surfaces Ψ, Ψ', nous avons une correspondance (2,2), deux points homologues correspondant à un même point de F. Soit G une surface représentant les couples de points homologues.

Sur la surface Ψ, aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8$ correspondent des points $P_1, P_2, \dots, P_8$, simples pour la surface et aux courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_\tau$, des courbes $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\tau$. Sur Ψ', aux courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_\tau, \gamma_{\tau+1}, \dots, \gamma_8$ correspondent des points simples $P'_1, P'_2, \dots, P'_8$ et aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\tau$, des courbes $\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_\tau$.

La surface G possède deux involutions du second ordre : l'une I_2, a pour image Ψ ; l'autre I'_2, a pour image Ψ'. A un point de F correspond sur G un groupe de quatre points comprenant deux groupes de I_2 et deux groupes de I'_2. En d'autres termes, le produit $I_2 I'_2$ est involutif.

Dans la correspondance entre les surfaces Ψ et G, les points de diramation sont ceux des courbes ρ_1,

$\rho_2, \ldots, \rho_\tau$ et les points $P_{\tau+1}, \ldots, P_8$. Dans la correspondance entre les surfaces Ψ' et G, les points de diramation sont ceux des courbes $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_\tau'$ et $P_{\tau+1}', \ldots, P_8'$.

Si l'on désigne par $R_1, R_2, \ldots, R_\tau$ les transformées de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\tau$ sur G et par $R_1', R_2', \ldots, R_\tau'$ celles des courbes $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_\tau'$, on a

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_\tau \equiv R_1' + R_2' + \ldots + R_\tau'$$

et ces deux courbes appartiennent au système canonique de G.

Liége, le 23 septembre 1943.