SUR LES INVOLUTIONS CYCLIQUES RÉGULIÈRES APPARTENANT A UNE SURFACE IRRÉGULIÈRE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans ses belles recherches sur les surfaces hyperelliptiques, G. Humbert a étudié la surface de Kummer, c'est-à-dire une surface régulière représentant une involution du second ordre appartenant à une surface irrégulière (1). Ces recherches ont été poursuivies par MM. F. Enriques et F. Severi d'une part (2), par Bagnera et M. De Franchis d'autre part (3); ces géomètres ont étudié les involutions cycliques régulières appartenant à une surface de Jacobi ou plus généralement à une surface de Picard, d'irrégularité deux. Ces involutions ne possèdent qu'un nombre fini de points unis. Comme applications de nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (4), nous avons tenté d'étendre certains des résultats obtenus à des surfaces d'irrégularité quelconque. Nous avons notamment montré que si une surface irrégulière contient une involution régulière du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, elle est l'image d'une involution

(1) *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Liouville*, 1893, 4e série, t. IX, p. 29-170, 361-475. *Œuvres*, t. II).

(2) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, 1903, t. XXXII, p. 283-392 et t. XXXIII, p. 321-403).

(3) *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* (*Memorie Soc. ital.*, dei XI, 1908, p. 251-343); *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et les surfaces irrégulières de genre zéro* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1910, t. XXX, p. 185-238).

(4) *Voir* notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient. et indus.*, 1935).

d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de même irrégularité ([5]).

Dans cette Note, nous nous proposons d'étendre ce résultat aux involutions cycliques d'ordre quelconque. Nous établissons le théorème suivant :

Si une surface d'irrégularité $q > 1$ contient une involution cyclique régulière d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, elle est l'image d'une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, appartenant à une surface irrégulière.

1. Soit F une surface algébrique non réglée, d'irrégularité $q > 1$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p supérieur à 2, n'ayant qu'un nombre fini (non nul) de points unis. Supposons cette involution régulière et désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de I_p.

Considérons sur F un système linéaire de courbes, simple, privé de points-base, $|D_1|$, et opérons sur ce système les transformations $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$; soient $|D_2|, |D_3|, \ldots, |D_p|$ les systèmes linéaires obtenus. Le système linéaire complet

$$|C_1| = |D_1 + D_2 + \ldots + D_p|$$

est transformé en lui-même par T et contient un système linéaire $|C_{11}|$, privé de points-base, appartenant à l'involution I_p. On peut d'ailleurs toujours supposer, en remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples convenablement choisi, que $|C_{11}|$ est moins ample que $|C_1|$. Cela étant, T agit sur les courbes du système $|C_1|$ comme une homographie sur les points d'un espace linéaire. Il existe au moins deux axes de cette homographie, c'est-à-dire au moins deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. L'un de ces systèmes est $|C_{11}|$. On peut d'ailleurs, en remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples,

---

([1]) *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1927, p. 394-414); *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux* (*Idem.*, 1927, p. 524-543); *Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière* (*Idem.*, 1927, p. 707-724).

supposer qu'il y a exactement p systèmes linéaires partiels, compris dans $|C_1|$, appartenant à l'involution I_p; nous les désignerons par $|C_{11}|, |C_{12}|, \ldots, |C_{1p}|$.

Soient r la dimension de $|C_1|$, ρ celle de $|C_{11}|$. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la surface F correspond dans cet espace une surface normale, que nous continuerons à désigner par F, sur laquelle la transformation T est déterminée par une homographie de période p de S_r. D'après les hypothèses faites, cette homographie possède p axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ et les hyperplans passant par $p-1$ de ces axes découpent sur F les p systèmes $|C_{11}|, |C_{12}|, \ldots, |C_{1p}|$. Supposons, pour fixer les idées, que le système $|C_{1i}|$ soit découpé sur F par les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_p$. Le système $|C_{11}|$ étant par construction dépourvu de points-base, les axes $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ ne peuvent rencontrer F et les points unis de l'involution I_p appartiennent donc à l'espace σ_1 et sont les points d'intersection de cet espace et de F. Par conséquent, les courbes $C_{12}, C_{13}, \ldots, C_{1p}$ passent par les points unis de I_p.

On peut supposer ρ aussi grand qu'on le veut, en remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples. Supposons donc $\rho \geqq 3$ et rapportons projectivement les courbes C_{11} aux hyperplans d'un espace linéaire S_ρ à ρ dimensions. Aux points de F correspondent les points d'une surface Φ, normale, image de l'involution I_p. Chaque point de Φ correspond à un groupe de I_p.

Désignons par Γ_{11} les sections hyperplanes de Φ, courbes qui correspondent aux courbes C_{11}. Aux systèmes linéaires $|C_{12}|$, $|C_{13}|, \ldots, |C_{1p}|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets que nous désignerons respectivement par $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|, \ldots, |\Gamma_{1p}|$.

Soient n l'ordre de la surface Φ, π le genre des courbes Γ_{11}. Les courbes C_{11} et par conséquent les courbes C_1 sont, d'après la formule de Zeuthen, de genre $p(\pi-1)+1$ et de degré pn; la surface F est donc d'ordre pn. Sur la surface Φ, les courbes $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \ldots, \Gamma_{1p}$ sont d'ordre n.

Aux points unis de l'involution I_p correspondent sur Φ des points de diramation isolés qui sont singuliers pour la surface. Chacun d'eux est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles infiniment petites.

2. A une courbe quelconque du système $|C_1|$ correspond sur Φ une courbe Γ de genre $p(\pi-1)+1$; à la courbe Γ correspond inversement la courbe C_1 d'où l'on est parti et ses $p-1$ transformées par T et ses puissances. Sur la courbe C_1 envisagée, il existe $\frac{1}{2}p(p-1)n$ couples de points appartenant à des groupes de I_p et, par conséquent, la courbe Γ possède $\frac{1}{2}p(p-1)n$ points doubles, variables avec la courbe. Lorsque la courbe C_1 décrit le système $|C_1|$, la courbe Γ décrit un système rationnel et appartient totalement à un système linéaire $|\Gamma|$, de degré virtuel p^2n et de genre virtuel

$$p(\pi-1)+\frac{1}{2}p(p-1)n+1.$$

Faisons varier d'une manière continue la courbe C_1 dans $|C_{11}|$ de façon à la faire tendre vers une courbe C_{11}. La courbe Γ correspondante varie d'une manière continue dans $|\Gamma|$ et tend vers une courbe Γ_{11} comptée p fois. On a donc

$$|\Gamma|=|p\Gamma_{11}|.$$

Faisons maintenant varier d'une manière continue C_1 dans $|C_1|$ de telle sorte qu'elle tende vers une courbe C_{12}. La courbe homologue Γ varie d'une manière continue et tend vers une courbe Γ_{12} comptée p fois, augmentée d'un certain nombre de composantes des points de diramation. Nous pouvons donc écrire

$$\Gamma\equiv p\Gamma_{12}+A_{12},$$

en désignant par A_{12} une courbe formée de composantes des points de diramation, par additions et soustractions.

On aura donc

$$p\Gamma_{11}\equiv p\Gamma_{12}+A_{12}. \tag{1}$$

Le même raisonnement conduit aux relations fonctionnelles

$$p\Gamma_{11}\equiv p\Gamma_{13}+A_{13}\equiv p\Gamma_{14}+A_{14}\equiv\ldots\equiv p\Gamma_{1p}+A_{1p}, \tag{2}$$

A_{13}, A_{14}, ..., A_{1p} étant des combinaisons à coefficients entiers des composantes des points de diramation.

L'interprétation projective des relations fonctionnelles (1) et (2) s'obtient de la manière suivante : Le système $|\Gamma|$ comprenant les courbes $|p\Gamma_{11}|$, c'est-à-dire les sections hyperplanes de Φ comptées p fois, est découpé sur Φ par un système linéaire d'hypersurfaces $|V_{\rho-1}|$ de S_ρ, qui comprend les hypersurfaces d'ordre p, mais peut aussi comprendre d'autres hypersurfaces. Il existe une hypersurface de $|V_{\rho-1}|$ ayant un contact d'ordre $p-1$ avec Φ le long de toute courbe $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \ldots, \Gamma_{1p}$.

La surface Φ étant donnée avec ses points de diramation, l'existence d'une courbe $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \ldots$ ou Γ_{1p} satisfaisant à une relation fonctionnelle (1) ou (2), suffit pour affirmer l'existence de la surface F. Soient en effet $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$ les coordonnées projectives d'un point de S_ρ et

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda x_i = \varphi_i(u_0, u_1, u_2) & (i = 0, 1, \ldots, \rho) \\ \varphi(u_0, u_1, u_2) = 0 \end{cases}$$

les équations de la surface Φ, où les φ sont des polynomes entiers et rationnels, les φ_i étant de même degré et φ étant irréductible. Soit encore

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_\rho) = 0$$

l'équation d'une hypersurface $V_{\rho-1}$ ayant un contact d'ordre $p-1$ en tout point d'intersection avec Φ, la ligne de contact étant par exemple une courbe Γ_{12}.

La surface de l'espace $S_{\rho+1}$, dont les équations sont les équations (3) jointes à

$$x^p_{\rho+1} = V(x_0, x_1, \ldots, x_\rho),$$

est irréductible, puisqu'il y a des points de diramation. Elle contient d'autre part une involution d'ordre p, engendrée par la transformation

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \ldots = \frac{x'_\rho}{x_\rho} = \frac{x'_{\rho+1}}{\varepsilon x_{\rho+1}},$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Cette transformation engendre une involution d'ordre p n'ayant qu'un nombre fini de points unis, correspondant aux points de diramation de Φ.

3. La surface F étant irrégulière, le système $|C_1|$ appartient

à un système continu complet $\{C\}$. En remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples suffisamment élevé, on peut supposer sans restriction que le système continu $\{C\}$ est formé de ∞^q systèmes linéaires de même dimension r, de même degré et de même genre que $|C_1|$.

A une courbe C, T fait correspondre une courbe C'. Lorsque C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et tend vers une courbe de $|C_1|$, C' varie également d'une manière continue sur F et tend vers une courbe de $|C_1|$. Il en résulte que le système continu complet $\{C'\}$ contient le système $|C_1|$ et par conséquent coïncide avec le système complet $\{C\}$.

Le système $\{C\}$ est donc transformé en lui-même par T; il contient un système linéaire $|C_1|$ transformé en lui-même par T. Supposons qu'il en contienne un second $|C_2|$. Rapportons projectivement les courbes $|C_2|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions; à la surface F correspond une surface normale F_2, d'ordre pn, sur laquelle l'involution I_p est engendrée par une homographie de période p de S_r. Cette homographie peut se réduire à l'identité, auquel cas le système complet $|C_2|$ appartient à l'involution I_p; la surface F_2 est alors multiple d'ordre p. Si l'homographie n'est pas l'identité, elle possède un certain nombre d'axes ponctuels et par conséquent il existe dans $|C_2|$ un certain nombre de systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p.

Aux systèmes linéaires appartenant à I_p et compris dans $|C_2|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|\Gamma_{21}|, |\Gamma_{22}|, \ldots, |\Gamma_{2t}|$.

Envisageons une courbe C quelconque de $\{C\}$; il lui correspond sur Φ une courbe $\overline{\Gamma}$ de genre $p(\pi-1)+1$, possédant $\frac{1}{2}p(p-1)n$ points doubles variables. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et tend vers une courbe C_1, la courbe $\overline{\Gamma}$ varie d'une manière continue sur Φ et tend vers une courbe Γ. Les courbes $\overline{\Gamma}$ appartiennent donc à un système continu comprenant les courbes Γ et, comme la surface Φ est par hypothèse régulière, ce système continu appartient au système linéaire $|\Gamma|$.

Cela étant, nous pouvons reprendre le raisonnement fait plus haut et arriver à des relations fonctionnelles

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{21} + A_{21} \equiv p\Gamma_{22} + A_{22} \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{2t} + A_{2t},$$

$A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2t}$ étant certaines combinaisons linéaires à coefficients entiers des composantes des points de diramation de Φ.

4. Supposons que le système continu complet $\{C\}$ puisse contenir une infinité de systèmes linéaires transformés chacun en lui-même par T. Ces systèmes forment nécessairement une variété continue que nous désignerons par $\{\overline{C}\}$. Soit $|C_i|$ un système de $\{\overline{C}\}$; il contient certainement au moins un système linéaire appartenant à l'involution I_p et à ce système correspond, sur Φ, un système complet $|\Gamma_{i1}|$ donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{i1} + A_{i1},$$

A_{i1} étant une combinaison linéaire à coefficients entiers des composantes des points de diramation.

Lorsque le système $|C_i|$ varie d'une manière continue dans le système $\{\overline{C}\}$, le système $|\Gamma_{i1}|$ engendre sur Φ un système continu. D'autre part, A_{i1} étant une combinaison à coefficients entiers des composantes des points de diramation, ces coefficients ne peuvent varier d'une manière continue et restent fixes. On en conclut que les systèmes linéaires $|\Gamma_{i1}|$ présentent les mêmes caractères (degré et genre virtuels). Mais la surface Φ étant par hypothèse régulière, ces systèmes doivent coïncider en un même système linéaire. Nous sommes donc conduit à une contradiction et par conséquent le système continu $\{C\}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de systèmes linéaires transformés chacun en lui-même par T.

Soit V_q la variété de Picard attachée à la surface F, c'est-à-dire la variété dont les points correspondent biunivoquement aux systèmes linéaires du système continu complet $\{C\}$. A la transformation T correspond une transformation birationnelle Θ de période p de la variété V_q en elle-même. Cette transformation Θ ne possède qu'un nombre fini de points unis; nous désignerons ce nombre par k. Ce nombre peut être calculé en appliquant une méthode due à M. Lefschetz [1]; il nous suffira de savoir qu'il est supérieur à p.

---

[1] *On certain numerical invariants of algebraic varieties with applica-*

Nous désignerons par $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$ les systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T.

Remplaçons le système $|C_1|$ par $|\lambda C_1|$, λ étant un entier positif. Le système $\{C\}$ est remplacé par le système continu complet

$$\{D\} = \{\lambda C\}$$

et ce système contient k systèmes linéaires

$$|D_1| = |\lambda C_1|, \quad |D_2|, \quad \ldots, \quad |D_k|$$

dont chacun est transformé en lui-même par T.

Si μ_1, μ_2, ..., μ_k sont des entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à λ, le système

$$|\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \ldots + \mu_k C_k|$$

coïncide avec l'un des systèmes $|D_1|$, $|D_2|$, ..., $|D_k|$ et, en choisissant convenablement les nombres μ, on obtiendra tous ces systèmes. Mais alors, on pourra prendre λ assez grand pour que chacun des systèmes $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_k|$ contienne exactement p systèmes linéaires appartenant à I_p.

Revenons à nos notations primitives; nous pourrons donc supposer que chacun des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$ contient p systèmes linéaires partiels appartenant à I_p. Nous indiquerons par $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$, ..., $|C_{ip}|$ les p systèmes linéaires appartenant à I_p contenus dans le système $|C_i|$ et par $|\Gamma_{i1}|$, $|\Gamma_{i2}|$, ..., $|\Gamma_{ip}|$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur la surface Φ.

Sur cette surface, nous avons les relations fonctionnelles

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{i1} + A_{i1} \equiv p\Gamma_{i2} + A_{i2} \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{ip} + A_{ip},$$

où A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ip} sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des composantes des points de diramation ($A_{11} \equiv 0$).

Les courbes Γ_{ij} sont d'ordre n.

5. Parmi les p systèmes $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$, ..., $|C_{ip}|$ de $|C_i|$ appartenant à l'involution I_p, il y a un au plus qui est dépourvu de

---

tions to abelian varieties (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1921, t. XXII, p. 327-482). *Voir* n^{os} 118-121.

points-base, les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution. Le raisonnement fait pour $|C_1|$ est en effet valable pour $|C_i|$.

Supposons, pour fixer les idées, que le système $|C_{21}|$ soit privé de points-base, c'est-à-dire qu'on ait $A_{21} \equiv 0$ et par suite

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{21}.$$

Les systèmes $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{21}|$ étant certainement distincts, le diviseur de Severi σ de la surface Φ est multiple de p ([1]).

Considérons le système

$$|\Gamma_{12} + \Gamma_{21} - \Gamma_{11}|.$$

On a

$$p(\Gamma_{12} + \Gamma_{21} - \Gamma_{11}) \equiv p\Gamma_{12}.$$

D'autre part, aux courbes $\Gamma_{12} + \Gamma_{21} - \Gamma_{11}$ correspondent sur F des courbes $C_{12} + C_{21} - C_{11}$ appartenant au système $|C_2|$ et formant un système appartenant à I_p. Ce système est donc un des systèmes $|C_{22}|$, $|C_{23}|$, ..., $|C_{2p}|$, par exemple $|C_{22}|$. On a donc

$$p\Gamma_{12} \equiv p\Gamma_{22}, \qquad A_{12} \equiv A_{22}.$$

En numérotant convenablement les systèmes appartenant à I_p et compris dans $|C_2|$, on aura de même

$$p\Gamma_{13} \equiv p\Gamma_{23}, \quad \ldots, \quad p\Gamma_{1p} \equiv p\Gamma_{2p}, \quad A_{13} \equiv A_{23}, \quad \ldots, \quad A_{1p} \equiv A_{2p}.$$

Considérons la courbe d'ordre zéro $M \equiv \Gamma_{21} - \Gamma_{11}$. On peut considérer M comme un opérateur ([2]) de période p et les courbes $M + \Gamma_{11}$, $2M + \Gamma_{11}$, ..., $pM + \Gamma_{11} \equiv \Gamma_{11}$ ont des multiples d'ordre p appartenant au système $|\Gamma|$. Considérons par exemple le système

$$|2M + \Gamma_{11}| = |2\Gamma_{21} - \Gamma_{11}|.$$

Il lui correspond sur F le système $|2C_{21} - C_{11}|$. Or on sait

---

([1]) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1910, t. XXX, p. 265-288).
([2]) Severi, *loc. cit.*

qu'il existe, dans $\{C\}$, un système linéaire $|\overline{C}|$ tel que [1]

$$|2C_2| = |C_1 + \overline{C}|.$$

Le système $|\overline{C}|$ doit être transformé en lui-même par T et est d'autre part distinct de $|C_2|$. S'il coïncidait avec $|C_1|$, les courbes $2C_{21} - C_{11}$ coïncideraient avec les courbes C_{11} et les courbes $2\Gamma_{21} - \Gamma_{11}$ avec les courbes Γ_{11}. Mais alors, on aurait $2\Gamma_{11} \equiv 2\Gamma_{21}$, c'est-à-dire $p = 2$, contrairement à l'hypothèse. Le système $|\overline{C}|$ coïncide donc avec un des systèmes $|C_3|, |C_4|, \ldots,$ $C_k|$, par exemple avec le premier. On a alors

$$|2\Gamma_{21} - \Gamma_{11}| = |\Gamma_{31}|, \qquad A_{31} \equiv 0, \qquad p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{21} \equiv p\Gamma_{31}.$$

En numérotant convenablement les systèmes $|C_4|, |C_5|, \ldots,$ $|C_k|$, on trouvera de même

$$|3M + \Gamma_{11}| = |\Gamma_{41}|, |4M + \Gamma_{11}| = |\Gamma_{51}|, \qquad \ldots,$$
$$|(p-1)M + \Gamma_{11}| = |\Gamma_{p1}|,$$
$$A_{41} \equiv 0, \; A_{51} \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad A_{p1} \equiv 0,$$
$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{21} \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{p1}.$$

En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit ensuite qu'on a

$$p\Gamma_{1j} \equiv p\Gamma_{2j} \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{pj}, \qquad A_{1j} \equiv A_{2j} \equiv \ldots \equiv A_{pj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Parmi les systèmes $|C_{p+11}|, |C_{p+12}|, \ldots, |C_{p+1p}|$, il ne peut exister un système n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, car autrement, si $|C_{p+11}|$, par exemple, jouissait de cette propriété, on aurait $p\Gamma_{p+11} \equiv p\Gamma_{11}$, ce qui est impossible.

Les courbes $\Gamma_{p+11}, \Gamma_{p+12}, \ldots, \Gamma_{p+1p}$ passent donc effectivement par des points de diramation de la surface Φ. En prenant le raisonnement fait plus haut, on verra que les courbes

$$M + \Gamma_{p+11}, \qquad M + \Gamma_{p+12}, \qquad \ldots, \qquad M + \Gamma_{p+1p}$$

coïncident avec les courbes provenant d'un des systèmes $|C_{p+2}|$, $|C_{p+3}|, \ldots, |C_k|$, par exemple avec le premier. On pourra alors

[1] Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (*Rend. R. Accad. dei Lincei*, 1° sem. 1915, p. 545-556, 593-598, 655-663).

poser

$$A_{p+1j} \equiv A_{p+21}, \qquad A_{p+12} \equiv A_{p+22}, \qquad \ldots, \qquad A_{p+1p} \equiv A_{p+2p}.$$

Et ainsi de suite.

On voit donc que si, parmi les systèmes $|C_{ij}|$, il en existe deux n'ayant pas pour points-base des points unis de I, le diviseur de Severi σ de la surface Φ est multiple de p et les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$ se répartissent par groupes de p ayant le même comportement, vis-à-vis de l'involution I_p.

6. Puisqu'on a $k > p$, on peut toujours trouver, dans la suite des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$, un système tel que les systèmes partiels, appartenant à I_p qu'il contient, aient tous des points-base en des points unis de cette involution. Nous supposerons, en modifiant un peu les notations adoptées plus haut, que $|C_2|$ est un tel système.

En rapportant projectivement les courbes C_2 aux hyperplans de l'espace S_r, F se transforme birationnellement en une surface F_2 sur laquelle la transformation T est déterminée par une homographie de période p. Cette homographie possède p axes ponctuels σ_1, σ_2, ..., σ_p et les systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, ..., $|C_{2p}|$ sont découpés sur F_2 par les hyperplans passant par $p - 1$ de ces axes. Comme chacun des systèmes précédents a comme points-base des points unis de I_p, ceux-ci ne peuvent se trouver sur un seul des axes σ_1, σ_2, ..., σ_p. Supposons, pour fixer les idées, que σ_1, σ_2 contiennent des points unis de I_p. Alors le système $|C_{21}|$, découpé par les hyperplans passant par σ_2, σ_3, ..., σ_p et le système $|C_{22}|$, découpé par les hyperplans passant par σ_1, σ_3, ..., σ_p, ont pour points-base les points unis de I_p appartenant à σ_3, σ_4, ..., σ_p, mais seuls les points unis appartenant à σ_2 sont des points-base de $|C_{21}|$ et seuls, les points unis appartenant à σ_1 sont des points-base de $|C_{22}|$.

On voit donc que parmi les systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, ..., $|C_{2p}|$, on peut toujours en trouver deux, au moins, tels que tout point uni de I_p soit point-base de l'un des systèmes au moins et qu'il y ait de ces points unis qui soient point-base de l'un de ces systèmes, mais non de l'autre.

Les courbes A_{21}, A_{22} sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des composantes des points de diramation, mais dans A_{21} par exemple, les composantes des points de diramation qui correspondent aux points unis de I_p appartenant à σ_1, ne figurent pas.

Cela étant, considérons la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{21} + A_{21}.$$

Parmi les hypersurfaces $V_{\rho-1}$ découpant sur Φ le système $|\Gamma|$, il en existe une ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface le long d'une courbe Γ_{21}, arbitrairement choisie. Par conséquent, Φ est l'image d'une involution cyclique I'_p, d'ordre p, appartenant à une surface Ψ_1, ayant un nombre fini de points unis. Ceux-ci ont pour homologues, sur Φ, les points de diramation par lesquels passent les courbes Γ_{21}.

De même, en partant de la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{22} + A_{22},$$

on voit qu'il existe une surface Ψ_2 contenant une involution cyclique I''_p d'ordre p, ayant pour image la surface Φ, les points de diramation sur cette surface étant ceux qui appartiennent aux courbes Γ_{22}.

Les surfaces Ψ_1, Ψ_2 sont certainement birationnellement distinctes, car elles sont obtenues comme surfaces Φ multiples d'ordre p, avec des points de diramation différents au moins en partie.

7. A un point de Ψ_1 correspond un point de Φ et à celui-ci correspondent p points de Ψ_2. Inversement, à un point de Ψ_2 correspondent p points de Ψ_1. Les surfaces Ψ_1, Ψ_2 sont donc liées par une correspondance (p, p). Désignons par F_0 une surface représentant les couples de points homologues dans cette correspondance.

Aux points de Ψ_1 correspondent sur F_0 des groupes de p points formant une involution J'_p, et aux points de Ψ_2 des groupes de p points formant une involution J''_p.

A un point de Φ correspond sur F_0 un groupe de p^2 points formé de p groupes de J'_p et de p groupes de J''_p.

Montrons tout d'abord que les involutions J'_p, J''_p sont cycliques.

Sur la surface Ψ_1, aux courbes Γ_{11}, Γ_{21} correspondent des courbes appartenant à un système linéaire $|G_1|$, transformé en lui-même par la transformation birationnelle T', de période p, génératrice de I'_p. Le système $|G_1|$ comprend au moins deux systèmes appartenant à l'involution I'_p; l'un, qui correspond à $|\Gamma_{11}|$, est dépourvu de points-base; l'autre, qui correspond à $|\Gamma_{21}|$, a pour points-base les points unis de I'_p. On pourra prendre, pour modèle projectif de Ψ_1, la surface ayant pour sections hyperplanes les courbes G_1; nous la désignerons encore par Ψ_1.

Aux points de diramation de Φ, qui n'appartiennent pas aux courbes Γ_{21}, correspondent sur Ψ_1 des groupes de p points singuliers de cette surface. Chacun de ses points présente précisément pour la surface Ψ_1 la même singularité que le point correspondant pour la surface Φ. Ces points sont évidemment des points de diramation pour la correspondance $(1, p)$ existant entre Ψ_1 et F_0. Aux courbes Γ_{22} correspondent sur Ψ_1 des courbes G_2 passant par les points unis de I'_p qui correspondent aux points de diramation de Φ communs aux courbes Γ_{21}, Γ_{22}. De plus, les courbes G_2 passent par les points singuliers de Ψ_1 qui correspondent aux points de diramation de Φ n'appartenant pas aux courbes Γ_{21} et le comportement de ces courbes en ces points est le même que celui des courbes Γ_{22} aux points correspondants. A la relation fontionnelle

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{22} + A_{22}$$

correspondra, sur Ψ_1, une relation fonctionnelle

$$pG_1 \equiv pG_2 + A_1,$$

où A_1 est une combinaison linéaire à coefficients entiers des composantes des points singuliers de Ψ_1 dont il vient d'être question. Ces points étant des points de diramation pour la correspondance $(1, p)$ entre Ψ_1 et F_0 donnant naissance sur F_0 à l'involution J'_p, on en conclut que cette involution est cyclique.

On démontre de même que J''_p est cyclique. Les points de diramation pour la correspondance $(1, p)$ entre les surfaces Ψ_2, F_0 correspondent aux points de diramation de Φ qui appartiennent aux courbes Γ_{21}, mais non aux courbes Γ_{22}.

Soient θ', θ'' les transformations birationnelles de période p de F_0 engendrant respectivement les involutions J'_v, J''_p. Considérons la transformation $\theta = \theta' \theta''$. Nous avons vu qu'à un point de Φ correspond sur F_0 un groupe de p^2 points se répartissant d'une part en p groupes de J'_p et d'autre part en p groupes de J''_p. On en conclut que la transformation θ a la période p. Elle engendre donc sur F_0 une involution cyclique J_p. Nous allons montrer que cette involution a pour image la surface F.

Les courbes G_1, G_2 de Ψ_1 ont pour homologues, sur F_0, des courbes appartenant à un même système linéaire $|G|$, transformé en lui-même par θ'. Si l'on intervertit les rôles des surfaces Ψ_1, Ψ_2, on voit que $|G|$ est également transformé en lui-même par θ'' et par conséquent par $\theta = \theta' \theta''$. Cela étant, observons qu'à une courbe Γ_{11} de Φ correspond une courbe G_{11} de $|G|$ transformée en elle-même à la fois par θ', θ'', θ. Il existe donc, dans $|G|$, un système linéaire partiel, appartenant à J_p, auquel correspond sur F le système comprenant les courbes C_{11}, c'est-à-dire le système $|C_1|$. Par conséquent, J_p a pour image la surface F.

On voit de plus que l'involution J_p sur F_0 est dépourvue de points unis. L'irrégularité de F_0 est évidemment au moins égale à celle de F.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2e série, t. LXVII, septembre-octobre 1943.)