Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, Séance du 17 novembre 1938, n° 11.

Sur les variétés appartenant à la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que C. Segre, généralisant la notion de quadrique, a introduit certaines variétés normales représentant les points d'un certain nombre d'espaces linéaires (1). Ces variétés, qui ont reçu le nom de variétés de Segre, s'introduisent dans un grand nombre de questions de géométrie algébrique. Nous avons été conduit à les utiliser en cherchant à construire des surfaces dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (surfaces que nous avons appelées surfaces projectivement canoniques). Nous avons en particulier montré que la section de la variété de Segre représentant les points de trois ponctuelles par une hypersurface cubique était une surface projectivement canonique.

Dans cette note, nous considérons les sections de la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles par des hyperquadriques et par des surfaces cubiques. Les variétés obtenues dans le premier cas ont des variétés canoniques et pluricanoniques d'ordre zéro. Dans le second cas, on obtient des variétés projectivement canoniques, c'est-à-dire dont le système canonique est celui des sections hyperplanes. Pour démontrer ces propriétés, nous utilisons la méthode par récurrence. On peut aussi, comme nous l'indiquons à la fin de la note, utiliser une représentation de la variété de Segre sur un espace linéaire à n dimensions.

Les propriétés établies ici peuvent, sans doute, se généraliser en considérant des variétés de Segre représentant les points d'un certain nombre de plans, par exemple; la méthode par récurrence utilisée ici pourrait encore s'appliquer en la modifiant convenablement (2).

---

(1) Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1891, pp. 192-204).

(2) Rappelons que nous avons démontré que la section de la variété de Segre V_4^6, de S_8, représentant les couples de points de deux plans, par une hypersurface cubique, est une variété à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Voir notre note « Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1936, pp. 1223-1225). On pourrait d'ailleurs démontrer que la section de V_4^6 par une hypersurface du quatrième ordre est une variété projectivement canonique.

1. Considérons n ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Les homographies entre ces ponctuelles dépendent linéairement de 2^n paramètres homogènes. Rapportons projectivement ces homographies aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à $r = 2^n - 1$ dimensions; aux groupes de n points pris, un sur chaque ponctuelle, correspondent les points de la variété de Segre V_n, d'ordre $n!$.

Les groupes de n points des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$ comprenant un point fixe P_1 de s_1 ont pour homologues sur V_n les points d'une variété de Segre $V^{(1)}_{n-1}$ représentant les points de $s_2, s_3, \ldots s_n$. Cette variété est d'ordre $(n-1)!$ et lorsque P_1 varie sur s_1, elle décrit un faisceau $|V^{(1)}_{n-1}|$, de degré zéro. De même, en considérant les points de $s_2, s_3, \ldots, s_n$, on obtient $n-1$ autres faisceaux $|V^{(2)}_{n-1}|$, $|V^{(3)}_{(n-1}|, \ldots, |V^{(n)}_{n-1)}|$ de degré zéro, formés de variétés de Segre d'ordre $(n-1)!$.

Deux variétés appartenant à deux faisceaux différents ont en commun une variété V_{n-2}, d'ordre $(n-2)!$ représentant les groupes de $n-2$ points de $n-2$ des n ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Par exemple, la variété $V^{(1)}_{n-1}$ associée au point P_1 de s_1 et la variété $V^{(2)}_{n-1}$ associée au point P_2 de s_2 ont en commun la variété représentant les groupes de n points de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dont font partie P_1, P_2, c'est-à-dire une variété représentant les points de $s_3, s_4, \ldots, s_n$.

Considérons n points P_1 de s_1, P_2 de $s_2, \ldots, P_n$ de s_n et l'homographie dégénérée formée de $n-1$ points quelconques de $n-1$ ponctuelles et du point P de la dernière. La section hyperplane de V_n correspondante contient les variétés $V^{(1)}_{n-1}, V^{(2)}_{n-1}, \ldots, V^{(n)}_{n-1}$ respectivement associées à $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et ces n variétés forment toute cette section hyperplane. Si l'on représente par $|H|$ le système linéaire des sections hyperplanes de V_n, on a donc

$$|H| = |V^{(1)}_{n-1} + V^{(2)}_{n-1} + \cdots + V^{(n)}_{n-1}|.$$

2. Considérons la variété Ω_{n-1}, section de la variété V_n par une hyperquadrique V^2_{r-1}. Nous allons démontrer que Ω_{n-1} possède une variété canonique d'ordre zéro.

Pour $n = 2$, la variété V_2 est une quadrique et la variété Ω_1 une biquadratique gauche, elliptique, dont le sytème canonique a l'ordre zéro. Pour $n = 3$, la variété Ω_2 est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (1).

(1) P. Burniat, Note sur les variétés de Segre (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, novembre 1938).

Supposons le théorème démontré pour les variétés Ω_{n-2} Reprenons la variété Ω_{n-1}. Sur cette variété $V_{n-1}^{(1)}, V_{n-1}^{(2)}, \ldots, V_{n-1}^{(3)}$ découpent des variétés $\Omega_{n-2}^{(1)}, \Omega_{n-2}^{(2)}, \ldots, \Omega_{n-2}^{(n)}$ formant des faisceaux de degré zéro; ces variétés ont, par hypothèse, des variétés canoniques d'ordre zéro.

Sur la variété Ω_{n-1}, le système adjoint au faisceau $|\Omega_{n-2}^{(1)}|$ est formé de variétés ne pouvant rencontrer les variétés du faisceau; ce système adjoint ne peut donc être que le système $|\lambda\Omega_{n-2}^{(1)}|$, λ étant un entier positif. Le système canonique de Ω_{n-1} est par conséquent le système $|(\lambda - 1)\Omega_{n-2}^{(1)}|$.

Le système adjoint au faisceau $|\Omega_{n-2}^{(2)}|$ est par conséquent le système $|(\lambda - 1)\Omega_{n-2}^{(1)} + \Omega_{n-2}^{(2)}|$. Mais les variétés de ce système ne peuvent rencontrer une variété $\Omega_{n-2}^{(2)}$; d'autre part, une variété $\Omega_{n-2}^{(1)}$ et une variété $\Omega_{n-2}^{(2)}$ ont en commun une variété Ω_{n-3} découpée, sur l'hyperquadrique V_{r-1}^{2}, par la variété de Segre V_{n-2} représentant les points des ponctuelles $s_3, s_4, \ldots, s_n$. Il en résulte que l'on a $\lambda = 1$ et que la variété Ω_{n-1} possède une surface canonique d'ordre zéro. La propriété, supposée vraie pour Ω_{n-2}, est donc démontrée pour Ω_{n-1}; or elle est démontrée pour Ω_1 et Ω_r; donc elle est démontrée pour toute valeur de n.

Sur la variété Ω_{n-1}, tout système linéaire est donc son propre adjoint; il coïncide par suite avec son biadjoint et, d'une manière générale, avec son i-adjoint. Les variétés pluricanoniques de Ω_{n-1} sont donc d'ordre zéro.

La section de la variété de Segre représentant les points de n *ponctuelles et d'une hyperquadrique est une variété dont les variétés canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro.*

Il en résulte que les sections hyperplanes de cette variété sont des variétés projectivement canoniques, c'est-à-dire dont les variétés canoniques sont découpées par les hyperplans.

3. Considérons maintenant la section de la variété V_n par une hypersurface cubique V_{2-1}^{3}; c'est une variété W_{n-1} à $n-1$ dimensions, d'ordre $3 . n!$ Nous allons démontrer que la variété W_{n-1} est projectivement canonique, c'est-à-dire que le système canonique de cette variété coïncide avec le système des sections hyperplanes.

Pour $n = 2$, la variété W_1 est la courbe normale d'ordre six et de genre quatre, de S_3, dont la série canonique g_6^3 est découpée par les plans de l'espace. Pour $n = 3$, la variété W_2 est une surface projectivement canonique ([1]) de genres $p_a = p_g = 8$, $p^{(1)} = 19$.

Supposons la propriété énoncée démontrée pour les variétés W_{n-2}. Sur la variété W_{n-1}, les variétés $V^{(1)}_{n-1}, V^{(2)}_{n-1}, \dots, V^{(n)}_{n-1}$ de V_n découpent des variétés projectivement canoniques par hypothèse et que nous désignerons respectivement par $W^{(1)}_{n-2}, W^{(2)}_{n-2}, \dots, W^{(n)}_{n-2}$. Ces variétés forment des faisceaux de degré zéro.

Désignons par K les sections hyperplanes de la variété W_{n-1} et rappelons que l'on a

$$|K| = |W^{(1)}_{n-2} + W^{(2)}_{n-2} + \cdots + W^{(n)}_{n-2}|.$$

Le système canonique d'une variété $W^{(1)}_{n-2}$ est découpé par les hyperplans de l'espace S_r; le système adjoint au faisceau $|W^{(1)}_{n-2}|$ est donc $|K + \lambda W^{(1)}_{n-2}|$, λ étant un entier positif. Le système canonique de la variété W_{n-1} est donc $|K + (\lambda - 1) W^{(1)}_{n-2}|$.

Le système adjoint au faisceau $|W^{(2)}_{n-2}|$ est par conséquent

$$|K + (\lambda - 1) W^{(1)}_{n-2} + W^{(2)}_{n-2}|.$$

Mais une variété $W^{(2)}_{n-2}$ étant par hypothèse projectivement canonique, ce système doit découper sur cette variété celui des sections hyperplanes; on doit donc avoir $\lambda = 1$ et le système canonique de W_{n-1} est le système $|K|$ de ses sections hyperplanes.

La propriété que nous avons en vue est donc démontrée pour W_{n-1} si elle l'est pour W_{n-2}; or elle est démontrée pour $n = 2$ et $n = 3$; donc elle est démontrée pour toute valeur de n.

La section de la variété de Segre représentant les points de n *ponctuelles par une hypersurface cubique, est une variété sur laquelle les variétés canoniques sont découpées par les hyperplans.*

4. Les théorèmes qui viennent d'être énoncés peuvent être obtenus par une autre voie.

Désignons par x_{11}, x_{12} les coordonnées projectives de s_1; par x_{21}, x_{22} celles de s_2, ...; par x_{n1}, x_{n2} celles de s_n. Les équations paramétriques de la variété de Segre V_n sont

$$\rho X_{i_1 i_2 \dots i_n} = x_{1 i_1} x_{2 i_2} \cdots x_{n i_n},$$

où les nombres $i_1, i_2, \dots, i_n$ sont égaux à 1 ou à 2.

([1]) Voir notre note « Sur les surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques » (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1937, pp. 92-96).

On peut obtenir une représentation birationnelle de la variété V_n sur un espace linéaire S_n à n dimensions en posant, avec M G. Scorza [1],

$$x_0 = x_{11} = x_{21} = \cdots = x_{n1}, x_1 = x_{12}, x_2 = x_{22}, \cdots, x_n = x_{n2}.$$

Formons les produits i à i des n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et faisons-en la somme après les avoir multipliés par des indéterminées; désignons par σ_i cette somme. On a, par exemple,

$$\sigma_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Posons en outre $\sigma_0 = \lambda$. Aux sections hyperplanes de V_n correspondent dans S_n les hypersurfaces F d'équation

$$x_0^n \sigma_0 + x_0^{n-1} \sigma_1 + \cdots x_0 \sigma_{n-1} + \sigma_n = 0,$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les coordonnées des points de S_n.

La base du système $|F|$ appartient à l'hyperplan $x_0 = 0$ et est constituée par les n espaces S_{n-2} découpés sur $x_0 = 0$ par $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Désignons par T la figure formée par ces n espaces S_{n-2}. Les hypersurfaces F passent simplement par les espaces S_{n-2} de T, doublement par les espaces S_{n-3} de T, triplement par les espaces S_{n-4} de T, ..., i fois par les espaces S_{n-i-1} de T, ..., $n-1$ fois par les points de T.

Aux sections de V_n par les hyperquadriques de S_2 correspondent dans S_n les hypersurfaces d'ordre $2n$ du système $|2F|$. Les adjointes de ces hypersurfaces $2F$ sont des hypersurfaces d'ordre $n-1$ formées de l'hyperplan $x_0 = 0$ compté $n-1$ fois, car ces hypersurfaces ont le même comportement que les hypersurfaces F vis-à-vis de la figure T.

Aux sections de V_n par les hypersurfaces cubiques de S_2 correspondent dans S_n les hypersurfaces, d'ordre $3n$, du système $|3F|$. On a

$$|(3F)'| = |F + (2F)'|,$$

donc les adjointes de $|3F|$ sont formées des hypersurfaces F et de l'hyperplan $x_0 = 0$ compté $n-1$ fois.

---

(1) Sulle varietà di Segre (*Atti della R. Accademia di Torino*, 1909-1910).

Liége, le 1er novembre 1938.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)