EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
N° 8. — 1942.

Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note récente [1], nous avons indiqué une représentation des transformations birationnelles du plan sur une surface. Comme nous l'avons fait remarquer, le procédé s'étend immédiatement aux transformations birationnelles de l'espace et l'on obtient une représentation de celles-ci sur une variété algébrique à trois dimensions. Dans cette note, nous nous proposons d'indiquer rapidement cette extension, puis d'examiner ce qui correspond, dans la représentation, aux courbes fondamentales de seconde espèce.

1. Soit T une transformation birationnelle entre deux espaces à trois dimensions Σ, Σ'. Aux plans φ de Σ, T fait correspondre dans Σ' des surfaces Φ', d'ordre n' et aux plans φ', T^{-1} fait correspondre des surfaces Φ d'ordre n de Σ.

Considérons le système linéaire complet

$$|\Psi| = |\varphi + \Phi|.$$

Il est formé de surfaces d'ordre $n+1$ et a même base que le système homaloïdal $|\Phi|$. Les surfaces Ψ ont deux à deux en commun des courbes variables d'ordre $2n+n'+1$. Le système $|\Psi|$ a le degré

$$N = 3(n+n')+2$$

et sa dimension r est supérieure à trois.

Rapportons projectivement les surfaces Ψ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Aux points de Σ correspondent les points d'une variété rationnelle normale V_3^N, d'ordre N.

Aux surfaces Φ correspondent sur V_3^N des surfaces rationnelles F, d'ordre $n+2n'+1$, formant un système homaloïdal $|F|$. Deux surfaces F ont en commun une courbe rationnelle d'ordre $n'+1$.

Aux plans φ correspondent sur V_3^N des surfaces rationnelles

[1] Sur la représentation des transformations birationnelles planes (*Bull. Soc. roy. Sc. Liége*, 1942, pp. 268-271).

F', d'ordre $2n+n'+1$, formant un système homaloïdal $|F'|$ et se rencontrant suivant des courbes d'ordre $n+1$.

Une surface F et une surface F' ont en commun une courbe d'ordre $n+n'$.

Les sections hyperplanes de la variété V_3^N sont les surfaces du système complet $|F+F'|$.

Considérons maintenant, dans Σ', le système linéaire complet

$$|\Psi'| = |\varphi' + \Phi'|.$$

C'est le transformé de $|\Psi|$ par la transformation T et, par conséquent, il a même degré N et même dimension r que $|\Psi|$. En rapportant les surfaces Ψ' aux hyperplans d'un espace linéaire S'_r à r dimensions, on obtient une variété V'_3 projectivement identique à V_3^N. On peut donc supposer que ces deux variétés coïncident.

La variété V_3^N représente la transformation birationnelle T.

2. Soit O un point fondamental isolé de T dans Σ. Indiquons par s sa multiplicité pour les surfaces Φ et supposons que les cônes tangents en ce point aux surfaces Φ soient irréductibles et varient dans un système linéaire ∞^3 (cas général).

Aux points infiniment voisins de O correspondent sur V_3^N les points d'une surface rationnelle H, dont l'ordre est égal à la multiplicité de O pour les courbes de Σ qui correspondent aux droites de Σ'. La surface H n'est pas rencontrée par les surfaces F', mais les surfaces F la coupent suivant des sections hyperplanes.

Si Ω est une surface fondamentale de T dans Σ, correspondant à un point fondamental isolé de Σ', il lui correspond sur V_3^N une surface H' fondamentale pour le système $|F|$, mais rencontrée suivant des sections hyperplanes par les surfaces F'.

Considérons maintenant une courbe fondamentale C de première espèce de T dans Σ. Soient ν son ordre et s sa multiplicité pour les surfaces Φ et par suite pour les surfaces Ψ. Supposons que les s plans tangents à une surface Φ en un point de C soient tous variables avec la surface.

Aux points infiniment voisins d'un point P de C correspondent sur V_3^N les points d'une courbe rationnelle k d'ordre s. Lorsque le point P décrit la courbe C, la courbe k décrit une surface K. Si μ est le nombre de points d'appui de la transformée d'une droite de Σ' sur la courbe C, la surface K est d'ordre $\mu+2\nu s$.

Les surfaces F′ rencontrent la surface K suivant ν courbes k variables. Les surfaces F coupent la surface K suivant des courbes d'ordre $\mu+\nu s$.

A une surface fondamentale de T dans Σ, homologue d'une courbe fondamentale de première espèce de Σ', correspond de même sur V_3^N une surface engendrée par ∞^1 courbes rationnelles.

3. Soient Γ une courbe fondamentale de seconde espèce de T dans Σ et Γ' la courbe fondamentale de seconde espèce qui lui correspond dans Σ'. Désignons par ν l'ordre de Γ, par s sa multiplicité pour les surfaces Φ, par ν' l'ordre de Γ' et par s' sa multiplicité pour les surfaces Φ'. Nous supposerons que les plans tangents aux surfaces Φ en un point de Γ, de même que les plans tangents aux surfaces Φ' en un point de Γ', sont tous variables.

On sait que Montesano a montré que les plans tangents à la courbe Γ en un de ses points P se distribuent suivant des groupes de α plans en nombre ∞^1, formant une involution g_α^1, de telle sorte que les surfaces Φ tangentes en P à un plan (tangent à Γ) touchent en ce point les $\alpha-1$ autres plans du groupe g_α^1 déterminé par le plan considéré ([2]). De plus, ces surfaces Φ se raccordent suivant α nappes le long de Γ. On a $s=\alpha\nu'$. La propriété analogue existe en chaque point de Γ' et l'on a $s'=\alpha\nu$.

Considérons un point P de Γ, la tangente p à cette courbe en ce point et un plan ϖ_1 passant par P. Les surfaces Φ tangentes à ϖ_1 en P forment un réseau et touchent encore en P les plans $\varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_\alpha$ qui, avec ϖ_1, forment un groupe de g_α^1. Les surfaces Ψ, tangentes à ϖ_1 en P, forment un système linéaire, de dimension $r-1$, déterminé en ajoutant les plans de l'espace aux surfaces Φ du réseau considéré. Par conséquent, ces surfaces Ψ touchent également en P les plans $\varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_\alpha$. A ces surfaces Ψ correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P′ de V_3^N et ce point P′ représente les points de Σ infiniment voisins de P situés dans les plans $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\alpha$.

Lorsque le plan ϖ_1 varie dans le faisceau d'axe p, le point P′

([2]) Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei.* 1er sem. 1918, 2e sem. 1921). Voir aussi notre exposé sur Les transformations birationnelles de l'espace (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. LXVII, Paris, Gauthier-Villars, 1934).

décrit sur V_3^N une courbe rationnelle γ. Une surface Ψ ayant en P s plans tangents se répartissant en ν' groupes de l'involution g_α^1, la courbe γ est d'ordre ν'.

Lorsque le point P décrit la courbe Γ, la courbe γ varie et décrit une surface G sur laquelle elle engendre un faisceau $|\gamma|$.

4. Soit Φ_0 une surface Φ déterminée. Les surfaces Ψ touchant Φ_0 en un point P de Γ ont α plans tangents en ce point communs avec Φ_0. Il leur correspond les hyperplans passant par un point P' de la courbe γ homologue de P. Lorsque le point P décrit la courbe Γ, le point P' varie sur la surface G et décrit une courbe γ' unisécante des courbes γ.

L'ordre de la courbe γ' est égal en nombre de points de Γ où une surface Ψ quelconque touche la surface Φ_0. Supposons que la surface Ψ dégénère en un plan et en une surface Φ ne se raccordant pas à Φ_0 le long de Γ. Cette surface Ψ dégénérée possède ν points multiples d'ordre $s+1$ aux ν points de rencontre du plan et de Γ. En ces points seuls, la surface Ψ considérée touche la surface Φ_0. Par conséquent, la courbe γ' est d'ordre ν.

Il est évident que la courbe γ' peut être obtenue en partant d'un point de la courbe Γ' comme γ a été obtenue en partant d'un point de Γ. La courbe γ' est donc rationnelle et engendre, sur la surface G, un faisceau $|\gamma'|$.

La surface G contient donc deux faisceaux $|\gamma|$, $|\gamma'|$ de courbes rationnelles unisécantes.

5. Pour évaluer l'ordre de la surface G, considérons deux surfaces Ψ dégénérées l'une en un plan φ_1 et une surface Φ_1, l'autre en un plan φ_2 et une surface Φ_2. La droite $\varphi_1\varphi_2$ ne rencontre pas la courbe Γ. La courbe commune aux surfaces Φ_1, Φ_2 ne rencontre pas non plus la courbe Γ (en des points variables). La courbe commune au plan φ_1 et à la surface Φ_2 rencontre Γ en ν points multiples d'ordre s pour la courbe considérée. A chacun de ces points correspondent ν' points de la surface G. De même, aux ν points de rencontre de la courbe Γ avec le plan φ_2 correspondent $\nu\nu'$ points de G. Par conséquent, un espace S_{r-2} de S_r coupe la surface G en $2\nu\nu'$ points et la surface G est d'ordre $2\nu\nu'$.

Reprenons la surface Φ_0 et soient ϖ, ϖ', ..., $\varpi^{(\nu')}$ ν' plans tangents à cette surface en un point P de Γ, deux quelconques de ces plans n'appartenant pas à un même groupe de l'involution g_α^1. Considérons les ν' systèmes ∞^{r-1} de surfaces Ψ touchant en P l'un de ces plans; on obtient ainsi ν' points de la courbe γ homologue du point P. On voit que, lorsque P décrit Γ, ces ν' points engendrent ν' courbes γ' qui appartiennent à la surface F homologue de Φ_0. Par suite, les surfaces F coupent la surface G suivant ν' courbes γ' (d'ordre ν).

Un plan φ de Σ coupe Γ en ν points et, par conséquent, la surface F' correspondante coupe G suivant ν courbes γ (d'ordre ν').

Une section hyperplane de V_3^N coupe la surface G suivant une courbe d'ordre $2\nu\nu'$. En particulier, lorsque cette section hyperplane se décompose en une surface F et une surface F', la courbe se décompose en ν courbes γ et ν' courbes γ'.

Liége, le 3 août 1942.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)
N° Réf. 2019.