Bulletin de la Classe des sciences

Un nouveau modèle projectif d'une surface non rationnelle de genres zéro

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d'un nouveau modèle projectif d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, possédant un système bicanonique irréductible.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Un nouveau modèle projectif d'une surface non rationnelle de genres zéro

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'un nouveau modèle projectif d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, possédant un système bicanonique irréductible.

Nous avons démontré qu'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$ dont le système bicanonique est irréductible, contient une courbe Γ de genre $\pi > 2$ non canonique, le système bicanonique étant $| 2\Gamma |$. De plus, cette surface Φ est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface F possédant une courbe canonique isolée [1]. Nous avons plus tard donné une démonstration plus simple de ce dernier point [2]. En utilisant le procédé employé dans cette seconde démonstration, nous construisons un nouveau modèle projectif de la surface Φ. Précisément, nous obtenons une surface d'ordre $8n^2(\pi - 1)$, appartenant à un espace à $n(2n - 1)(\pi - 1)$ dimensions. Sur cette surface, il existe un hyperplan touchant la surface le long de toute courbe n-canonique.

---

[1] *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41), *Surfaces privées de courbe canonique possédant un système bicanonique irréductible* (Convegno intern. di Geometria a celebr. della nascità di Federigo Enriques, Milan, 1971, pp. 101-107).

[2] *Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1966, pp. 1058-1063), *Construction de surfaces à sections hyperplanes tricanoniques possédant une seule courbe canonique* (Idem, pp. 1200-1205); *Sur les surfaces contenant une involution non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls* (Idem, pp. 1388-1396), *Surfaces algébriques ayant une courbe canonique isolée* (Buletinul Instititului Politehnic din Jasi, 1974, pp. 63-68).

Dans notre travail cité plus haut, nous avons ramené la détermination des surfaces Φ à celle des surfaces possédant une seule courbe canonique isolée. Nous croyons que c'est la détermination de ces surfaces qui permettra de résoudre le premier problème. Cela justifie la publication de cette note.

1. Soit une surface algébrique Φ de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$ dont le système bicanonique est irréductible. Nous avons démontré qu'il existe sur Φ une courbe Γ de genre $\pi = P_2$ et de degré virtuel $\pi - 1$, non canonique, le système bicanonique étant $| 2\Gamma |$. Le système $| \Gamma' |$, adjoint à la courbe Γ, a les mêmes caractères (degré, genre et dimension) que le système $| 2\Gamma |$ et on a

$$| 2\Gamma' | = | 4\Gamma |,$$

le diviseur de Severi de la surface étant $\sigma = 2$.

Le système n-canonique $| \Gamma_n |$ de la surface a le degré $n^2 \nu$, le genre

$$\frac{1}{2} n(n + 1)\nu + 1$$

et la dimension

$$P_n - 1 = \frac{1}{2} n(n - 1)\nu,$$

où nous avons posé $\nu = \pi - 1$.

Il existe sur Φ un système $| \Gamma_n^+ |$ ayant les mêmes caractères que le que le système $| \Gamma_n |$ et tel que l'on ait

$$| 2\Gamma_n | = | 2\Gamma_n^+ |.$$

Ceci rappelé, considérons dans un espace S_N à $N = n(n - 1)\nu + 1$ dimensions, deux espaces σ_1, σ_2 à $n(n - 1)\nu : 2$ dimensions ne se rencontrant pas.

Dans σ_1, nous considérons une transformée birationnelle Φ de la surface Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes n-canoniques Γ_n et dans σ_2, une transformée birationnelle Φ^+ de la même surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_n^+. Il existe entre Φ et Φ^+ une correspondance birationnelle T et nous nous proposons de considérer la variété V_3 lieu des droites joignant les points homologues de ces surfaces.

Considérons un hyperplan passant par σ_2. Il coupe une section Γ_n de Φ suivant $n^2\nu$ points et rencontre donc la variété V_2 lieu des droites s'appuyant sur la courbe Γ_n et la courbe correspondante Γ_n^+ de Φ^+ suivant $n^2\nu$ droites. D'autre part, la variété V_2 passe simplement par la courbe Γ_n homologue de la courbe Γ_n^+ sur Φ^+. La surface V_2 est donc d'ordre $2n^2\nu$ et est située dans un hyperplan passant par σ_2.

Un hyperplan passant par σ_2 coupe la variété V_3 suivant une surface V_2 et d'autre part elle passe simplement par la surface Φ^+ d'ordre $n^2\nu$. La variété V_3 est donc d'ordre $3n^2\nu$.

2. Puisque nous avons $2\Gamma_n \equiv 2\Gamma_n^+$, il existe une hyperquadrique Q de σ_1 coupant la surface Φ suivant une courbe de $|2\Gamma|$ et une hyperquadrique Q^+ de σ_2 coupant la surface Φ^+ suivant la courbe $2\Gamma_n^+$ homologue dans T de la courbe précédente. Désignons par φ et φ^+ les cônes qui projettent respectivement Q de σ_2 et Q^+ de σ_1. L'hyperquadrique

$$\varphi + \varphi^+$$

coupe la variété V_3 suivant le lieu, d'ordre $4n^2\nu$ des droites s'appuyant sur les courbes qui viennent d'être considérées en des points homologues dans T et suivant une surface F d'ordre $2n^2\nu$.

Désignons par H l'homographie harmonique de S_N ayant pour axes les espaces σ_1, σ_2. Cette homographie transforme en elle-même la variété V_3 et la quadrique $\varphi + \varphi^+$, donc la surface F, sur laquelle elle détermine une involution I du second ordre.

Si cette involution possédait un point uni P, celui-ci devrait appartenir à l'un des espaces σ_1, σ_2. Mais alors le point correspondant dans T sur l'autre espace serait également uni, ce qui est absurde. L'involution I est donc privée de points unis et la surface F ne rencontre pas les axes σ_1, σ_2 de l'homographie H.

Les surfaces Φ, Φ^+ sont des images de l'involution I.

3. Nous désignerons par C_i les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ_i et par C_i^+ celles qui correspondent aux courbes Γ_2^+.

Les courbes C_n et C_n^+ sont les sections hyperplanes de F. Les premières sont découpées par les hyperplans passant par σ_2 et les secondes par les hyperplans passant par σ_1. Sur la surface Φ, les courbes Γ_n découpent sur les courbes Γ_{n-1} la série canonique. Donc sur F, les courbes C_n sont adjointes aux courbes C_{n-1}.

Observons que l'adjoint aux courbes Γ_{n-1}^{+} est le système $|\Gamma_n^{+}|$. Les courbes C_n^{+} sont donc également les adjointes aux courbes C_{n-1}^{+} et finalement, le système $|C_n|$ des sections hyperplanes de F est adjoint aux courbes C_{n-1}, C_{n-1}^{+} et ces courbes appartiennent donc à un même système $|C_{n-1}|$.

Le genre d'une courbe C_{n-1} est d'après la formule de Zeuthen égal à $2n(n-1)\nu+1$, donc les courbes C_n découpent sur une courbe C_{n-1} une série d'ordre $4n(n-1)\nu$ et de dimensions $2n(n-1)\nu$. Or la dimension de $|C_n|$ est $N = 2n(n-1)\nu+1$; donc il existe une courbe C_n contenant une courbe C_{n-1}. Nous poserons

$$C_n - C_{n-1} \equiv C,$$

C étant la courbe canonique de la surface F.

D'autre part, entre le genre arithmétique p_a de F et celui $p_a' = 0$ de Φ, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1),$$

d'où $p_a = 1$ et la surface F est régulière.

4. En répétant le raisonnement fait plus haut, on voit que les courbes C_i sont les adjointes aux courbes C_{i-1} et que les courbes C_i^{+} sont les adjointes aux courbes C_{n-1}^{+}. Si donc les courbes C_i et C_i^{+} appartiennent à un même système linéaire $|C_i|$, les courbes C_{i-1}, C_{i-1}^{+} appartiennent également à une même système linéaire $|C_{i-1}|$. Or, cela est vrai pour $i = n$, donc c'est vrai pour toute valeur de i. On a évidemment

$$C_i - C_{i-1} \equiv 0.$$

Le système $|C_i|$ a la dimension $i(i-1)\nu+1$, le degré $2i^2\nu$ et le genre $2_i(i+1)\nu+1$.

En particulier, à la courbe Γ correspond sur F une courbe C_1 de genre $2\nu+1$.

Les courbes C_2 qui correspondent aux courbes Γ_2 appartiennent à un système linéaire de dimension $2\nu+1$. $|C_2|$ est l'adjoint à la courbe C_1 et on a

$$C_2 - C_1 \equiv C_1$$

et les courbes C et C_1 coïncident. On a

$$|C_2| = |2C_1|,\ |C_3| = |3C_1|, \ldots, |C_n| = |nC_1|, \ldots$$

La courbe canonique de F est donc la courbe C_1 qui correspond à la courbe Γ.

5. Les surfaces Φ et Φ^+ sont des images de l'involution I. Nous allons en construire une nouvelle image.

Soient Q_0 les hyperquadriques de σ_1 découpant sur Φ les courbes du système $|2\Gamma_n|$ et Q_0^+ celles qui découpent dans σ_2 sur Φ^+ les courbes du système $|2\Gamma_n^+| = 2|\Gamma|$.

2. Nous désignerons par φ_0 les hyperquadriques de S_N formées en ajoutant à l'hyperquadrique projetant Q_0 de σ_2 l'hyperquadrique projetant Q_0^+ de σ_1. Les hyperquadriques φ_0 dépendent de $n(2n-1)\nu + 1$ paramètres. Elles rencontrent la variété V_3 suivant un nombre fini de droites et sont transformées en elles-même par H. Elles rencontrent donc la surface F en un nombre fini de groupes de l'involution I. Les variétés φ_0 dépendent de $2n(2n-1)\nu + 1$ paramètres.

Rapportons projectivement les hyperquadriques φ_0 aux hyperplans d'un espace Σ à $N' = 2n(2n-1)\nu + 1$ dimensions. Considérons une droite s de S_N qui joint un point P de Φ au point P^+ de Φ^+ que T lui fait correspondre. Au point P correspond un point P_0 situé sur une surface Ψ_0 d'ordre $4n^2\nu$ dont les sections hyperplanes sont les courbes $2\Gamma_n$. Elle est située dans un espace σ_1' à $n(2n-1)\nu$ dimensions appartenant à l'espace Σ. De même, au point P^+ correspond un point P_0^+ appartenant à une surface Ψ^+ d'ordre $4n^2\nu$, dont les sections hyperplanes sont les courbes $2\Gamma_n^+$, située dans un espace à $n(2n-1)\nu$ dimensions, appartenant à l'espace Σ.

A la droite $s = PP^+$ correspond la droite $s' = P_0P_0^+$ et au groupe de l'involution I appartenant à la surface F correspond un point P' de s'.

Le lieu du point P' est une surface F_0, d'ordre $8n^2\nu$. Puisqu'aux hyperquadriques φ_0 correspondent les hyperplans de Σ, à l'hyperquadrique $\varphi + \varphi^+$ correspond un hyperplan contenant la surface F_0, qui appartient donc à un espace à $2n(2n-1)\nu$ dimensions. Elle est la section par un hyperplan de Σ de la variété V_3^1 lieu des droites s'.

La surface F_0 est une nouvelle image de l'involution I.

6. A l'hyperquadrique projetant de σ_2' une hyperquadrique Q_0 de σ_1 correspond un hyperplan ξ passant par σ_2. Lorsque la courbe $2\Gamma_n$ découpée sur Φ par Q_0 dégénère en une courbe Γ_n comptée deux fois, la section de F_0 par l'hyperplan ξ doit dégénérer en une courbe

comptée deux fois, c'est-à-dire que l'hyperplan ξ touche la surface F_0 suivant une courbe que nous désignerons par $\overline{C}_n$, homologue de la courbe C_n.

De même, à une courbe C_n^+ de F correspond sur F_0 une courbe $\overline{C}_n^+$ le long de laquelle un hyperplan passant par σ_1' touche la surface.

A la section de F par un hyperplan correspond sur F_0 une courbe variable dans un système linéaire. Lorsque cet hyperplan tend vers un hyperplan passant par σ_2 cette courbe se réduit à la courbe $2\overline{C}_n$. Lorsque l'hyperplan tend vers une hyperplan passant par σ_2, cette courbe devient $2\overline{C}_n^+$. Les courbes $2\overline{C}_n$ et $2\overline{C}_n^+$ appartiennent donc à un même système linéaire et on a

$$2\overline{C}_n = 2\overline{C}_n^+ .$$

Il est clair que les surfaces Φ, Φ^+, F_0 sont deux à deux birationnellement équivalentes et F_0 constitue un nouveau modèle projectif d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, à système bicanonique irréductible.

Liège, le 14 août 1974.