Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 15 octobre 1938, n° 10.

Sur les surfaces algébriques dont le système canonique est composé au moyen d'une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Il existe des surfaces algébriques dont le système canonique est composé au moyen d'une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis; telle est, par exemple, la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois, dont le système canonique est composé au moyen d'une involution du second ordre ayant 28 points unis. Cette surface est irrégulière, tandis que l'involution est régulière. Nous nous sommes proposé de rechercher si le système canonique d'une surface régulière pouvait être composé au moyen d'une involution du type envisagé. Il faut répondre par la négative à cette question et nous établissons précisément le théorème suivant :

Le système canonique d'une surface algébrique régulière de genres arithmétique et linéaire supérieurs à l'unité ne peut être composé au moyen d'une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Il suffit d'ailleurs de démontrer ce théorème dans le cas d'une involution d'ordre premier. En effet, si le système canonique d'une surface F est composé au moyen d'une involution I_n, d'ordre n, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, il existe sur cette surface au moins une involution d'ordre premier, au moyen de laquelle l'involution I_n et par suite le système canonique de la surface sont composés.

Dans cette note, nous partons d'une involution I_p d'ordre premier p; nous contruisons un système linéaire contenant p systèmes partiels composés au moyen de l'involution, l'un d'eux étant dépourvu de points-base, et nous montrons que les adjoints successifs de ce système présentent la même particularité. Nous montrons ensuite qu'il existe, entre les systèmes linéaires correspondants sur une surface image de l'involution, certaines relations fonctionnelles qui conduisent à des contradictions.

1. Soit F une surface algébrique régulière, de genre arithmétique $p_a > 1$ et de genre linéaire $p^{(1)} > 1$, dont le système canonique $|L|$ est composé au moyen d'une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même, génératrice de l'involution I_p.

Construisons sur F un système linéaire complet $|C|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_p|$ composés au moyen de l'involution I_p, le premier, $|C_1|$, étant dépourvu de points-base. Les autres systèmes $|C_2|, |C_3|, \dots, |C_p|$ ont alors nécessairement comme points-base les points unis de l'involution I_p [1].

Soient Φ une surface image de l'involution I_p, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_p|$ les systèmes linéaires de Φ, complets, qui correspondent respectivement aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_p|$.

Le système $|\Gamma_1|$ est dépourvu de points-base. Si nous désignons par n son degré, par π son genre, le système $|C|$ a le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

2. Soient $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \dots, |\Gamma'_p|$ les systèmes adjoints respectifs de $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_p|$ et $|C'_1|, |C'_2|, \dots, |C'_p|$ les systèmes qui leur correspondent sur F. Ces p systèmes appartiennent au système

(1) Voir, par exemple, notre exposé : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scient. et indust.*, Paris, Hermann, 1935).

adjoint $|C'|$ de $|C|$. Si nous désignons par $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ les dimensions de ces systèmes, par r' celle de $|C'|$, nous avons

$$r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_p + p = r' + 1. \tag{1}$$

Par hypothèse, le système $|\Gamma'_1 - \Gamma_1|$ existe et a la dimension $p_a - 1$, mais les systèmes $|\Gamma'_2 - \Gamma_1|$, $|\Gamma'_3 - \Gamma_1|, \ldots, |\Gamma'_p - \Gamma_1|$ ne peuvent exister.

Les courbes C' découpent, sur une courbe C, la série canonique complète, puisque la surface F est régulière [1]. Considérons une courbe C_1 ne passant par aucun des points unis de l'involution I_p. La série canonique de cette courbe contient p séries composées au moyen de I_p. L'une de ces séries, de dimension $\pi - 1$, est la transformée de la série canonique de la courbe Γ_1 homologue de C_1; elle est donc découpée, sur la courbe C_1, par les courbes C'_1. Les autres séries ont la dimension $\pi - 2$ et sont découpées par les courbes $C'_2, C'_3, \ldots, C'_p$.

Une courbe $\Gamma'_2, \Gamma'_3, \ldots,$ ou Γ'_p ne pouvant contenir comme partie une courbe Γ_1, les systèmes $|\Gamma'_2|, |\Gamma'_3|, \ldots, |\Gamma'_p|$ ont la la dimension $\pi - 2$.

La surface F étant régulière, on a $r' = p_a + p(\pi - 1)$ et la formule (1) donne $r'_1 = p_a + \pi - 1$. Par conséquent, le système canonique $|\Gamma'_1 - \Gamma_1|$ de Φ a la dimension $p_a - 1$. En effet, la surface Φ, représentant une involution appartenant à une surface régulière F, est régulière et le système $|\Gamma'_1|$ découpe, sur une courbe Γ_1, la série canonique complète.

3. Désignons par π_2 le genre des courbes Γ_2. Le système $|\Gamma'_2|$ a, d'une part, la dimension $p_a + \pi_2 - 1$ et, d'autre part, la dimension $\pi - 2$; on a donc $\pi_2 = \pi - p_a - 1$.

Sur la courbe Γ_2, les courbes Γ'_1 découpent une série linéaire d'ordre $m \leq 2\pi - 2$, dont la dimension est égale à $p_a + \pi - 1$,

---

(1) CASTELNUOVO, Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve... (*Annali di Matematica*, s. 2, t. XXV, 1897). *Memorie scelte*, p. 395.

puisque aucune courbe Γ'_1 ne peut contenir une courbe Γ_2. Cette série ne peut donc être spéciale et on a

$$m - \pi_2 = p_a + \pi - 1,$$

d'où $m = 2\pi - 2$.

Nous avons rappelé que les courbes C_2 passent par les points unis de l'involution I_p; le résultat précédent montre que le système $|C'_1|$ ne possède pas, comme points-base, les points unis de l'involution I_p.

Les points de diramation de l'involution I_p sur la surface Φ sont équivalents à des ensembles de courbes rationnelles. On sait que l'on a

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 + \Delta_2,$$

où Δ_2 est une certaine combinaison de ces courbes rationnelles.

Le système $|C'|$ contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p, l'un de ces systèmes, $|C'_1|$, n'ayant pas pour points-base des points unis de l'involution. On a donc

$$p\Gamma'_1 \equiv p\Gamma'_2 + \Delta'_2,$$

Δ'_2 ayant une signification analogue à celle de Δ_2.

Des relations précédentes, on déduit

$$p(\Gamma'_1 - \Gamma_1) \equiv p(\Gamma'_2 - \Gamma_2) + \Delta'_2 - \Delta_2;$$

d'où $\Delta'_2 \equiv \Delta_2$. On en conclut que les courbes C'_2 se comportent comme les courbes C_2 aux points unis de l'involution I_p.

Les courbes Γ'_2 découpent, sur une courbe Γ_2, la série canonique complète, d'ordre $2\pi - 2 - 2(p_a + 1)$.

De la relation

$$\Gamma'_1 - \Gamma_1 \equiv \Gamma'_2 - \Gamma_2,$$

on déduit que le degré de $|\Gamma_2|$ est égal à $n - 2(p_a + 1)$.

Les systèmes $|\Gamma_3|$, $|\Gamma_4|$, ..., $|\Gamma_p|$ donnent lieu à des résultats analogues.

4. Sur une courbe Γ_3, les courbes Γ'_2 découpent une série linéaire complète d'ordre $m \leq 2\pi - 2$, de dimension $\pi - 2$, certainement non spéciale, puisque le genre $\pi - p_a - 1$ de Γ_3 est inférieur à $\pi - 1$. On a donc

$$m - (\pi - p_a - 1) = \pi - 2;$$

d'où $m = 2\pi - 2 - (p_a + 1)$.

Plus généralement, une courbe $\Gamma'_i (i > 1)$ coupe une courbe $\Gamma_k (k > 1)$ en $2\pi - 2 - (p_a + 1)$ points, k étant distinct de i.

5. Soit $\pi^{(1)}$ le genre linéaire de la surface Φ. Le système $|\Gamma'_1|$ a le degré

$$\pi^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n.$$

D'autre part, le système $|C'|$ a le degré

$$p^{(1)} - 1 + 4p(\pi - 1) - pn.$$

Le système $|C'_1|$ n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, le degré de $|C'|$ vaut p fois celui de $|\Gamma'_1|$. On a donc

$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1). \qquad (2)$$

6. Dans ce qui précède, nous avons établi que si n et π sont le degré et le genre du système $|\Gamma_1|$, les systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|, \dots, |\Gamma_p|$ ont le degré $n - 2(p_a + 1)$ et le genre $\pi - (p_a + 1)$. La dimension de $|\Gamma'_1|$ est $r'_1 = \pi - 2 + (p_a + 1)$ et celle des systèmes $|\Gamma'_2|, |\Gamma'_3|, \dots, |\Gamma'_p|$ est $\pi - 2$.

Le système $|C'|$ contient, comme le système $|C|$, p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p et l'un de ces systèmes, $|C'_1|$, n'a pas pour points-base les points unis de l'involution I_p. Cela étant, nous pouvons reprendre les raisonnements faits sur $|C|$ en partant de $|C'|$ et nous obtenons les résultats suivants :

Si

$$n' = \pi^{(1)} - 1 + 4(n - 1) - n$$

et

$$\pi' = \pi^{(1)} + 3(\pi - 1) - n$$

sont le degré et le genre de $|\Gamma'_1|$. les systèmes $|\Gamma'_2|, |\Gamma'_3|, \dots, |\Gamma'_p|$ ont le degré $n' - 2(p_a + 1)$ et le genre $\pi' - (p_a + 1)$. Le système $|\Gamma_1''|$, second adjoint de $|\Gamma_1|$, a la dimension $r_1'' = \pi' - 2 + (p_a + 1)$ et les systèmes $|\Gamma_2''|$, $|\Gamma_3''|, \ldots, |\Gamma_p''|$, seconds adjoints de $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_p|$ respectivement, ont la dimension $\pi' - 2$.

Le système $|C_1''|$, transformé sur F du système $|\Gamma_1''|$, n'a pas pour points-base des points unis de l'involution I_p, par conséquent, les courbes Γ_1'' rencontrent chacune des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ en un même nombre $4(\pi - 1) - n$ de points.

7. Sur une courbe Γ_1, les courbes Γ_1'' découpent une série complète d'ordre $4(\pi - 1) - n$, non spéciale, de dimension $4(\pi - 1) - n - \pi$. Par conséquent, le système bicanonique $|\Gamma_1'' - \Gamma_1|$ de Φ a la dimension

$$r_1'' - 3(\pi - 1) + n = p_a + \pi^{(1)} - 1.$$

Sur une courbe Γ_2, les courbes Γ_1'' découpent une série complète d'ordre $4(\pi - 1) - n$, non spéciale, de dimension $4(\pi - 1) - n - \pi + p_a + 1$. La dimension du système $|\Gamma_1'' - \Gamma_2|$ est donc égale à

$$r_1'' - 3(\pi - 1) + n - p_a - 1 = \pi^{(1)} - 2.$$

On trouve de même que les systèmes $|\Gamma_1'' - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_1'' - \Gamma_p|$ ont la dimension $\pi^{(1)} - 2$.

Par hypothèse, on a $p^{(1)} > 1$, donc, par la relation (2), on a $\pi^{(1)} > 1$ et les systèmes envisagés existent certainement.

8. Les systèmes

$$|\Gamma_2'' - \Gamma_1|, \quad |\Gamma_2'' - \Gamma_2|, \quad |\Gamma_2'' - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_2'' - \Gamma_p|$$

doivent coïncider, dans un certain ordre, avec les systèmes

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_1|, \quad |\Gamma_1'' - \Gamma_2|, \quad |\Gamma_1'' - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_1'' - \Gamma_p|.$$

Les systèmes $|\Gamma_2'' - \Gamma_2|$ et $|\Gamma_1'' - \Gamma_1|$ coïncident (système bicanonique). Si le système $|\Gamma_2'' - \Gamma_1|$ coïncide avec le système $|\Gamma_1'' - \Gamma_2|$, on a

$$|2\Gamma_1| = |2\Gamma_2|.$$

Si le système $|\Gamma_2'' - \Gamma_1|$ coïncide avec l'un des systèmes $|\Gamma_1'' - \Gamma_3|, \dots, |\Gamma_1'' - \Gamma_p|$, par exemple avec le premier, on a

$$|2\Gamma_1| = |\Gamma_2 + \Gamma_3|.$$

Nous avons établi que les courbes Γ_2' rencontrent les courbes Γ_1 en $2\pi - 2$ points, les courbes Γ_2 en $2(\pi - 1) - 2(p_a + 1)$ points et les courbes Γ_3 en $2\pi - 2 - (p_a + 1)$ points. Les courbes Γ_2' coupent les courbes $2\Gamma_1$ en $4\pi - 4$ points; elles doivent donc couper soit les courbes $2\Gamma_2$, soit les courbes $\Gamma_2 + \Gamma_3$ en $4\pi - 4$ points. Cela conduit dans les deux cas à $p_a + 1 = 0$, contrairement à l'hypothèse $p_a > 1$.

Par conséquent, le système canonique d'une surface régulière de genres $p_a > 1$, $p^{(1)} > 1$ ne peut être composé au moyen d'une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Liége, le 2 septembre 1938.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)