Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*.
Séance du 16 juin 1942. — N° 6.

Sur la surface du quatrième ordre contenant une conique,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note publiée autrefois sous le même titre (1), nous avons démontré que la surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une conique ne pouvait posséder de transformation birationnelle involutive en elle-même. Nous nous proposons de revenir sur cette surface et de montrer qu'elle ne peut posséder de transformation birationnelle en elle-même. Nous montrerons de plus que les courbes de genre donné, existant sur la surface, se distribuent en un nombre fini de systèmes linéaires.

1. Les surfaces du quatrième ordre contenant une conique déterminée sont en nombre ∞^{25}. Une telle surface contient une seconde conique; les coniques de l'espace étant en nombre ∞^{8}, il existe ∞^{33} surfaces du quatrième ordre assujetties à la seule condition de contenir une conique. Ces surfaces dépendent donc de 18 modules et leur nombre-base est $\rho = 2$.

Soient F une telle surface, C ses sections planes, C_1 la conique qu'elle doit contenir, $C_2 \equiv C - C_1$ la seconde conique qui lui appartient.

Les courbes C, C_1 forment une base de F et le nombre-base correspondant est

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Si les courbes C, C_1 ne constituent pas une base minima, le déterminant de celle-ci doit être un facteur de -12 et le rapport

(1) *Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut*, 1912.

des deux déterminants est d'ailleurs un carré parfait [2]. La base minima aurait donc pour déterminant —3. Si Γ_1, Γ_2 sont les courbes formant cette base, ν_{11}, ν_{22} leurs degrés, ν_{12} le nombre de leurs points communs, on a

$$\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}^2 = -3.$$

Or, ν_{11} et ν_{22} sont pairs, puisque la surface F est de genres un ($p_a = P_4 = 1$); ν_{12} est donc impair et ν^2_{12} est un multiple de 4 augmenté de 1, ce qui est absurde. Donc, les courbes C, C_1 constituent une base minima de F.

2. Une courbe C_0, de genre π, tracée sur la surface F, satisfait à la relation fonctionnelle

$$C_0 \equiv \lambda C + \lambda_1 C_1,$$

où λ, λ_1 vérifient l'équation [3]

$$2\pi - 2 = 4\lambda^2 + 4\lambda\lambda_1 - 2\lambda_1^2.$$

Posons

$$\lambda = u, \quad \lambda_1 = t + u.$$

La relation précédente devient

$$t^2 - 3u^2 = 1 - \pi. \tag{1}$$

Les courbes de genre π, tracées sur F, correspondent à des solutions en nombres entiers de l'équation (1); elles seront données par

$$C_0 \equiv uC + (t + u)\,C_1.$$

Pour que la courbe C_0 existe effectivement, elle doit rencontrer les courbes C_1, C_2 en des points en nombre positif ou nul (on suppose C_0 distincte de C_1 et de C_2).

Supposons en premier lieu C_0 rationnelle ($\pi = 0$).

Les courbes C_1, C_2 correspondent respectivement aux solutions $t = 1$, $u = 0$ et $t = -2$, $u = 1$ de l'équation

$$t^2 - 3u^2 = 1.$$

---

(2) SEVERI, La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'École normale supérieure*, 1908, pp. 449-468).

(3) SEVERI, Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1910, t. XXX).

La courbe C_0 rencontre C_1 en $-2t$ points et C_2 en $6u+4t$ points. C_0 étant distincte de C_1, C_2, on doit avoir

$$t \leq 0, \quad 2t + 3u \geq 0.$$

On a donc $t = -\sqrt{3u^2+1}$; d'où, pour la seconde inégalité,

$$2\sqrt{3u^2+1} \leq 3u.$$

On en déduit $3u^2+4 \leqslant 0$. La surface F ne possède donc pas de courbes rationnelles en dehors de C_1, C_2.

3. Supposons maintenant $\pi > 0$. La surface F ne peut posséder de courbes elliptiques, car dans ce cas le déterminant de la base serait un carré parfait (Severi, *Complementi*..., loc. cit.).

La courbe C_0 rencontre C_1 en $-2t$ points et C_2 en $2(2t+3u)$ points. On a donc encore

$$t \leq 0, \quad 2t + 3u \geq 0.$$

Actuellement, t et u satisfont à l'équation (1) et l'on a

$$2\sqrt{3u^2+1-\pi} \leq 3u,$$

d'où

$$3u^2 \leq 4(\pi - 1).$$

Le nombre de solutions de l'équation (1) donnant des courbes de genre π est donc limité.

Observons d'ailleurs que si $t = \mathfrak{M}3$, $\pi - 1 = \mathfrak{M}3$. Si $t = \mathfrak{M}3 \pm 1$, $\pi = \mathfrak{M}3$. Les courbes tracées sur F sont donc de genre $\pi = 3\varepsilon$ ou $\pi = 3\varepsilon + 1$. En particulier, la surface ne contient pas de courbes de genre deux.

Supposons $\pi = 3$. On a $3u^2 \leqslant 8$, $u^2 \leqslant 2$, $u \leqslant 1$. On obtient une seule solution, $u = 1$, $t = -1$. En dehors du système des sections planes, F ne contient donc pas de courbes de genre trois.

Supposons $\pi = 4$. On a $3u^2 \leqslant 12$, $u^2 \leqslant 4$, $u \leqslant 2$. On obtient deux solutions : $u = 1$, $t = 0$ et $u = 2$, $t = -3$. Les systèmes correspondants sont

$$|C + C_1|, \quad |2C - C_1| = |C + C_2|.$$

Le premier système est découpé sur F par les quadriques passant par la conique C_2, le second par les quadriques passant par la conique C_1.

On vérifie qu'il n'existe sur F aucun système linéaire de genres $\pi=5$, 6, 7, 8, 10.

Pour $\pi=9$, on trouve le seul système $|2C|$.
Pour $\pi=12$, les systèmes $|2C+C_1|$, $|2C+C_2|$.
Pour $\pi=13$, les systèmes $|2C+2C_1|$, $|2C+2C_2|$.

La surface du quatrième ordre, assujettie à la seule condition de contenir une conique, possède deux seules courbes rationnelles (deux coniques coplanaires), un seul système de genre trois (celui des sections planes), deux systèmes de genre quatre, un système de genre neuf, deux systèmes de genre douze et deux de genre treize. Les courbes de genre donné se répartissent en un nombre fini de systèmes linéaires.

4. Si la surface F admet une transformation birationnelle en elle-même, il lui correspond une substitution automorphe de module ± 1 de la forme quadratique fondamentale (Severi, *Complementi...*, loc. cit.)

$$2\lambda^2 + 2\lambda\lambda_1 - \lambda_1^2.$$

Soit

$$\lambda' = \alpha\lambda + \beta\lambda_1, \quad \lambda_1' = \gamma\lambda + \delta\lambda_1 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1)$$

une de ces substitutions. On a

$$\alpha = t - u, \quad \beta = u, \quad \gamma = 2u, \quad \delta = t + u \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

et

$$\alpha = \quad t - u, \beta = u, \gamma = -2t - 4u, \delta = t + u \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = -1),$$

t et u satisfaisant à l'équation

$$t^2 - 3u^2 = 1.$$

Envisageons le premier cas et soit T la transformation birationnelle de F en soi. Si C', C'_1 sont les courbes que T fait correspondre à C, C_1, on a

$$C' = (t-u)C + 2uC_1, \quad C_1' = uC + (t+u)C_1.$$

La courbe C'_1, étant rationnelle, doit coïncider avec C_1 ou C_2. Si elle coïncide avec C_1, on a $u=0$, $t=+1$ et T est l'identité.

Si C'_1 coïncide avec C_2, c'est-à-dire avec $C-C_1$, on a $u=1$, $t=-2$. Mais alors, la courbe

$$C' = -3C + 2C_1$$

rencontre les courbes C en -8 points, ce qui est absurde. Le premier cas ne peut donc se présenter.

Passons au second cas. La transformation fait correspondre à C, C_1, respectivement

$$C' = -(t+u)C - 2(t+2u)C_1, \quad C'_1 = uC + (t+u)C_1.$$

Si C'_1 coïncide avec C_1, on a $u=0$, $t=1$, $C'=-C-2C_1$, ce qui est impossible.

Si C'_1 coïncide avec C_2, on a $u=1$, $t=-2$; d'où $C'=C$.

Observons que la transformation est involutive et transforme en lui-même le système des sections planes; elle est donc déterminée sur F par une homographie harmonique, homologique ou biaxiale. Or, une surface du quatrième ordre invariante pour une homographie harmonique dépend au plus de onze modules (SEVERI, *Complementi...*, loc. cit.). Nous sommes donc de nouveau conduit à une contradiction.

Une surface du quatrième ordre, assujettie à la condition de contenir une conique, ne peut posséder de transformation birationnelle en elle-même.

5. Observons, pour terminer, que la forme quadratique

$$2\lambda^2 + 2\lambda\lambda_1 - \lambda_1^2$$

admet deux séries de substitutions automorphes.

La première série, pour laquelle on a $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, comprend les substitutions non périodiques engendrées par la substitution

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La seconde série, pour laquelle on a

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1, \quad \alpha + \delta = 0,$$

comprend des substitutions involutives. L'une d'elles est

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les autres sont données par

$$ST^k,$$

où k est un entier.

Liége, le 17 juin 1942.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

N° Réf. 2019