GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques,

par Lucien GODEAUX, Membre de l'Académie.

Dans nos travaux antérieurs [1], nous avons étudié les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques et particulièrement les congruences engendrées par les droites joignant les deux points caractéristiques ou intersections des plans tangents aux surfaces enveloppes aux points caractéristiques. Dans un travail récent [2], nous avons cherché quelles étaient les propriétés qui subsistaient lorsque l'on considère une surface (x) dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques x, x_1, x_2; nous avons considéré les congruences engendrées par les droites xx_1, xx_2 et par les intersections des plans tangents aux surfaces (x) et (x_1), (x_2). Dans ce nouveau travail, nous considérons une surface (x) dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques x, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}; nous considérons les droites $r_{ik} = xx_{ik}$ et les droites s_{ik} intersection des plans

[1] On trouvera l'exposé de ces travaux et la bibliographie dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Paris, Hermann, 1934).

[2] *Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1941, pp. 295-302).

tangents à la surface (x) en x et à la surface (x_{ik}) en x_{ik}. Nous cherchons en premier lieu dans quelles conditions les plans focaux de r_{ik} passent par les foyers de s_{ik}, ce qui nous donne une propriété caractéristique des surfaces minima-projectives (surfaces pour lesquelles il y a conservation des asymptotiques sur les nappes (x), (x_{ik}) de l'enveloppe des quadriques de Lie). Une autre propriété caractéristique de ces surfaces s'obtient en écrivant que les plans focaux de s_{ik} coupent r_{ik} aux conjugués harmoniques des foyers de r_{ik} par rapport aux points x, x_{ik}. Nous considérons ensuite les surfaces telles que les développables d'une congruence (r_{ik}), par exemple (r_{11}), correspondent aux asymptotiques de la surface (x). Il en est alors de même des congruences (r_{22}), (s_{12}), (s_{21}). Nous sommes ainsi conduit à une configuration qui présente un certain intérêt. Les suites de Laplace dans lesquelles les foyers des droites s_{12}, s_{21} se succèdent, sont inscrites dans les suites de Laplace dans lesquelles se succèdent les foyers des droites r_{11}, r_{22}.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes normales de Wilczynski du point x satisfont au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1 x = 0\,,$$
$$x^{02} + 2\,ax^{10} + c_2 x = 0\,,$$

a et b étant des fonctions de u, v non identiquement nulles.

Les quadriques de Lie de la surface (x) ont cinq points caractéristiques : le point x et les sommets du quadrilatère de Demoulin.

Posons

$$\alpha = 2\,(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}} + 4\,(b^{01} + c_1)\,,$$
$$\beta = 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}} + 4\,(a^{10} + c_2)\,.$$

Attachons au point x le tétraèdre de Cartan, ayant pour sommet les points

$$x,\quad m = x\,(\log a)^{10} - 2\,x^{10},\quad n = x\,(\log b)^{01} - 2\,x^{01},$$
$$y = [8\,ab - (\log a)^{10}\,(\log b)^{01}]\,x + 2\,x^{10}\,(\log b)^{01} + \\ + 2\,x^{01}\,(\log a)^{10} - 4\,x^{11}.$$

Un des sommets $\bar{x}$ du quadrilatère de Demoulin peut s'écrire

$$\bar{x} = \xi\eta x - \eta m - \xi n - y,$$

ξ et η étant des racines déterminées des équations

$$\xi^2 + \alpha = 0;\quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y;$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Cela étant, les équations locales de la droite $r = x\bar{x}$ sont

$$\frac{z_2}{\eta} = \frac{z_3}{\xi} = \frac{z_4}{1}. \tag{r}$$

Les équations locales de la droite s, intersection du plan tangent à la surface (x) au point x et du plan tangent à la surface $(\bar{x})$ au point correspondant $\bar{x}$ sont

$$z_1 + \xi z_2 + \eta z_3 = 0,\quad z_4 = 0. \tag{s}$$

Nous allons nous occuper des congruences (r) et (s).

2. L'équation différentielle des développables de la congruence (r) est

$$- [\xi\,(\log a\xi)^{10} - 2\,b\eta]\,du^2 + [h_1 + \eta^{10} - (k_1 - \xi^{01})]\,du\,dv + \\ + [\eta\,(\log b\eta)^{01} - 2\,a\xi]\,dv^2 = 0, \tag{1}$$

où l'on pose

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4\,ab,\quad k_1 = -(\log a)^{11} + 4\,ab.$$

Le foyer, correspondant à une racine $du : dv$ de l'équation (1), est découpé sur la droite r par le plan

$$du\,\{\xi\,z_1 + [2\,\xi\,(\log a\xi)^{10} - 4\,b\eta - \alpha]\,z_2 - 2\,(h_1 + \eta^{10})\,z_3\} = \\ = dv\,\{\eta z_1 - 2\,(k_1 + \xi^{01})\,z_2 + [2\,\eta\,(\log b\eta)^{01} - 4\,a\xi - \beta]\,z_3\}. \tag{2}$$

Le plan focal de la droite r, correspondant à la racine $du : dv$ de (1), a pour équation

$$(z_3 - \xi z_4)\, du = (z_2 - \eta z_4)\, dv\,. \tag{3}$$

3. L'équation différentielle des développables de la congruence (s) est

$$\begin{aligned}-[\xi(\log a\xi)^{10} + 2\, b\eta]\, du^2 + [h_1 + \eta^{10} - (k_1 + \xi^{01})]\, du dv\, + \\ + [\eta\, (\log b\eta)^{01} + 2\, a\xi]\, dv^2 = 0\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Le foyer de s correspondant à la racine $du : dv$ de l'équation (4) est découpé sur cette droite par le plan

$$(z_3 - \xi z_4)\, du + (z_2 - \eta z_4)\, dv = 0\,. \tag{5}$$

Le plan focal correspondant à cette racine a pour équation

$$\begin{aligned}\{\, \xi\, (z_1 + \xi z_2 + \eta z_3) - 2\, \eta\, [\xi\, (\log a\xi)^{10} + 2\, b\eta]\, z_4 + \alpha\eta z_4\, + \\ + 2\, \xi\, (h_1 + \eta^{10})\, z_4\, \}\, du = \{\, \eta\, (z_1 + \xi z_2 + \eta z_3)\, - \\ - 2\, \xi\, [\eta\, (\log b\eta)^{01} + 2\, a\xi]\, z_4 + \beta\xi z_4 + 2\, \eta\, (k_1 + \xi^{01})\, z_4\, \}\, dv\,.\end{aligned} \tag{6}$$

4. En tenant compte des équations (1) et (3), on trouve, pour équation quadratique des plans focaux de la droite r,

$$\begin{aligned}[\xi\, (\log a\, \xi)^{10} - 2\, b\eta]\, (z_2 - \eta z_4)^2\, - \\ - [h_1 + \eta^{10} - (k_1 + \xi^{01})]\, (z_2 - \eta z_4)\, (z_3 - \xi z_4)\, - \\ - [\eta\, (\log b\eta)^{01} - 2\, a\xi]\, (z_3 - \xi z_4)^2 = 0\,.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après les équations (4) et (5), les foyers de la droite s sont découpés sur cette droite par le couple de plans d'équation

$$\begin{aligned}[\xi\, (\log a\xi)^{10} + 2\, b\eta]\, (z_2 - \eta z_4)^2\, + \\ + [h_1 + \eta^{10} - (k_1 + \xi^{01})]\, (z_2 - \eta z_4)\, (z_3 - \xi z_4)\, - \\ - [\eta\, (\log b\eta)^{01} - 2\, a\xi]\, (z_3 - \xi z_4)^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Pour que les plans focaux de r passent par les foyers de la droite s, ces deux dernières équations doivent être identiques; on doit donc avoir

$$\xi\, (\log a\xi)^{10} = 0, \quad \eta\, (\log b\eta)^{01} = 0\,. \tag{7}$$

On a identiquement

$$a\alpha^{10} + 2\, \alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\, \beta b^{01}\,,$$

c'est-à-dire

$$a\xi^2 (\log a\xi)^{10} = b\eta^2 (\log b\eta)^{01} .$$

Ceci rappelé, on satisfait aux conditions (7) de la manière suivante :

1° $\xi = 0$, $\eta = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques; les droites r et s sont les directrices de Wilczynski de la surface. Nous avons étudié antérieurement ce cas en détail.

2° $\xi = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$ et $(\log b\eta)^{01} = 0$. La seconde condition entraîne $(\log a\xi)^{10} = 0$. Les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que trois points caractéristiques. Nous avons également étudié ce cas antérieurement.

3° $\eta = 0$ et $(\log a\xi)^{10} = 0$. Ce cas est analogue au précédent.

4° $(\log a\xi)^{10} = 0$, $(\log b\eta)^{01} = 0$. Ces deux relations sont équivalentes. Si ξ et η ne sont pas identiquement nuls, les quadriques de Lie de la surface (x) ont cinq points caractéristiques, mais il y a conservation des asymptotiques sur les cinq nappes de l'enveloppe de ces quadriques (1).

Si les quadriques de Lie d'une surface (x) *ont cinq points caractéristiques et s'il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe, et dans ce cas seulement, les plans focaux de la droite joignant le point* x *à un autre point caractéristique* $\bar{\mathrm{x}}$, *passent par les foyers de la droite intersection des plans tangents aux surfaces* (x), $(\bar{\mathrm{x}})$ *en des points homologues.*

5. Supposons toujours qu'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x), c'est-à-dire que l'on ait

(1) Voir notre note *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1909, pp. 37-53).

$$(\log a\xi)^{10} = 0, \quad (\log b\eta)^{01} = 0 . \tag{8}$$

Sous ces conditions, si $du : dv$ satisfait à l'équation (1), $-du : dv$ satisfait à l'équation (4). Soient p le foyer de la droite r correspondant à une racine $du : dv$ de l'équation (1) et p' le point de rencontre de r avec le plan focal de la droite s correspondant à la racine $-du : dv$ de l'équation (4). Nous allons démontrer que le quaterne $(x\bar{x}pp')$ est harmonique. Il revient au même de démontrer que le quaterne formé par les plans passant par la droite $z_1 = z_4 = 0$ et par les points précédents, est harmonique.

Sous les conditions (8), l'équation (2) donne, en posant

$$z_2 = \eta z_4, \quad z_3 = \xi z_4 ,$$

$$z_1 (\xi du - \eta dv) - z_4 \{ [4 b\eta^2 + \alpha\eta + 2 \xi (h_1 + \eta^{10})] du -$$
$$- [4 a\xi^2 + \beta\xi + 2\eta (k_1 + \xi^{01})] dv \} = 0$$

et l'équation (6), où l'on a remplacé dv par $-dv$,

$$z_1 (\xi du + \eta dv) - z_4 \{ [4b\eta^2 + \alpha\eta - 2 \xi (h_1 + \eta^{10})] du +$$
$$+ [4 a\xi^2 + \beta\xi - 2 \eta (k_1 + \xi^{01})] dv \} = 0 .$$

Les plans passant par $z_1 = z_4 = 0$ et respectivement par x et $\bar{x}$ ont pour équations

$$z_4 = 0, \quad z_1 + \xi\eta z_4 = 0 .$$

Un calcul simple donne

$$(x, \bar{x}, p, p') = -1 .$$

Si les quadriques de Lie d'une surface (x) *ont cinq points caractéristiques et s'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe, les conjugués harmoniques des foyers de la droite joignant le point* x *à un autre point caractéristique* $\bar{\text{x}}$, *par rapport aux points* x, $\bar{\text{x}}$, *appartiennent aux plans focaux de la droite intersection des plans tangents aux surfaces* (x), ($\bar{\text{x}}$) *en deux points correspondants.*

On vérifie aisément que la propriété précédente ne subsiste plus lorsqu'il n'y a pas conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe.

6. Observons que l'on a identiquement

$$a\xi\,[\xi\,(\log a\xi)^{10} - 2b\eta] = b\eta\,[\eta\,(\log b\eta)^{01} - 2\,a\,\xi]\,.$$

Nous allons étudier les surfaces particulières pour lesquelles on a

$$\xi\,(\log a\xi)^{10} - 2\,b\eta = 0, \quad \eta\,(\log b\eta)^{01} - 2\,a\xi = 0\,, \tag{9}$$

ξ, η, $(\log a\xi)^{10}$ et $(\log b\eta)^{01}$ n'étant pas nuls.

ξ et η étant deux racines déterminées des équations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0\,,$$

les points caractéristiques de la quadrique de Lie, distincts de x, sont

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{11} &= \quad \xi\eta x - \eta m - \xi n - y\,,\\
\overline{x}_{12} &= -\,\xi\eta x + \eta m - \xi n - y\,,\\
\overline{x}_{21} &= -\,\xi\eta x - \eta m + \xi n - y\,,\\
\overline{x}_{22} &= \quad \xi\eta x + \eta m + \xi n - y\,.
\end{aligned}$$

Désignons par r_{ik} la droite $\overline{x x_{ik}}$ et par s_{ik} la droite intersection du plan $z_4 = 0$ tangent à la surface (x) au point x et du plan tangent à la surface $(\overline{x}_{ik})$ au point x_{ik}.

Sous la condition (9), l'équation différentielle des développables des congruences (r_{11}), (r_{22}), (s_{12}), (s_{21}), se réduit à

$$du\,dv = 0\,.$$

Les foyers de la droite r_{11} sont

$$p_{11} = 2\,(k_1 + \xi^{01})\,x - \overline{x}_{11}, \quad q_{11} = 2\,(h_1 + \eta^{10})\,x - \overline{x}_{11}\,,$$

le premier correspondant à $du = 0$, le second à $dv = 0$.

Les plans focaux ρ_{11}, σ_{11} correspondant à $du = 0$, $dv = 0$ ont respectivement pour équations

$$z_2 - \eta z_4 = 0, \quad z_3 - \xi z_4 = 0\,.$$

Le plan σ_{11} est tangent à la surface (p_{11}) et le plan ρ_{11} à la surface (q_{11}).

Les foyers de la droite r_{22} correspondant respectivement à $du = 0$, $dv = 0$, sont

$$p_{22} = 2(k_1 - \xi^{01})x - x_{22}, \quad q_{22} = 2(h_1 - \eta^{10})x - \bar{x}_{22}$$

et les plans focaux ρ_{22}, σ_{22} rangés dans le même ordre ont pour équations

$$z_2 + \eta z_4 = 0, \quad z_3 + \xi z_4 = 0 .$$

Les foyers de la droite s_{12} correspondant à $du = 0$, $dv = 0$ appartiennent aux plans

$$z_2 + \eta z_4 = 0, \quad z_3 - \xi z_4 = 0$$

et sont donc donnés par

$$p_{12} = \eta x + n, \quad q_{12} = \xi x - m .$$

On voit donc que *le point* p$_{12}$ *appartient au plan* ρ_{22} *et le point* q$_{12}$ *au plan* σ_{11}.

Les plans focaux ρ_{12}, σ_{12} de s_{12}, correspondant à $du = 0$, $dv = 0$, ont pour équations

$$z_1 + \xi z_2 - \eta z_3 + [\xi\eta + 2(k_1 + \xi^{01})] z_4 = 0 ,$$
$$z_1 + \xi z_2 - \eta z_3 + [\xi\eta + 2(h_1 - \eta^{10})] z_4 = 0 .$$

Le plan ρ_{12} coupe la droite r_{11} au point

$$2(k_1 + \xi^{01})x + \bar{x}_{11} ,$$

donc, *le plan* ρ_{12} *passe par le conjugué harmonique du point* p$_{11}$ *par rapport aux points* x, $\bar{\text{x}}_{11}$.

Le plan σ_{12} coupe la droite r_{11} au point

$$2(h_1 - \eta^{10})x + \bar{x}_{11}$$

et la droite r_{22} au point

$$2(h_1 - \eta^{10})x + \bar{x}_{22} .$$

Le plan σ_{12} *passe par le conjugué harmonique du point* q$_{22}$ *par rapport aux points* x, $\bar{\text{x}}_{22}$.

Les foyers de la droite s_{21} correspondant à $du = 0$, $dv = 0$ sont situés dans les plans

$$z_2 - \eta z_4 = 0, \quad z_3 + \xi z_4 = 0$$

et sont donnés par

$$p_{21} = \eta x + n, \quad q_{21} = \xi x + m .$$

Le point p_{21} *appartient au plan* ρ_{11} *et le point* q_{12} *au plan* σ_{22}.

Le plan focal ρ_{21} de s_{21} correspondant à $du = 0$ a pour équation

$$z_1 - \xi z_2 + \eta z_3 + [\xi\eta + 2(k_1 - \xi^{01})] z_4 = 0$$

et coupe la droite r_{22} au point

$$2(k_1 - \xi^{01}) x + \bar{x}_{22}.$$

Le plan focal σ_{21} de s_{21} correspondant à $dv = 0$ a pour équation

$$z_1 - \xi z_2 + \eta z_3 + [\xi\eta + 2(h_1 + \eta^{10})] z_4 = 0$$

et coupe la droite r_{11} au point

$$2(h_1 + \eta^{10}) x + \bar{x}_{11}.$$

Le plan focal σ_{21} *passe par le conjugué harmonique du point* q_{11} *par rapport aux points* x, $\bar{\mathrm{x}}_{11}$ *sur la droite* r_{11} *et le plan focal* ρ_{21} *par le conjugué harmonique de* p_{22} *par rapport aux points* x, $\bar{\mathrm{x}}_{22}$ *sur la droite* r_{22}.

7. Les points p_{11}, q_{11} se succèdent dans une suite de Laplace que nous désignerons par L_{11}. D'une manière générale, nous désignerons par L_{ik} la suite de Laplace dans laquelle se succèdent les points p_{ik} et q_{ik}.

Le point q_{11} est le transformé de Laplace de p_{11} dans le sens des v. En utilisant les relations donnant les coordonnées des points x^{10}, x^{01}, m^{10}, ..., y^{01} qui se trouvent dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* cité plus haut, on trouve en effet

$$2p_{11}^{01} - [\eta - (\log b)^{01}] p_{11} = \\ = 4 \{ k_1^{01} + \xi^{02} - (k_1 + \xi^{01}) [\eta - (\log b)^{01}] \} x$$

et, d'autre part,

$$p_{11} - q_{11} = 2 [k_1 + \xi^{01} - h_1 - \eta^{10}] x.$$

On a

$$2p_{11}^{10} - [\xi - (\log a)^{10}] p_{11} = 2(k_1 + \xi^{01} - h_1 - \eta^{10}) q_{12},$$

donc, la droite joignant p_{11} à son transformé de Laplace dans le sens des u, passe par le point q_{12}.

Le point p_{12} est le transformé de Laplace de q_{12} dans le sens des u; on a en effet

$$2\,q_{12}^{10} - [\xi - (\log a)^{10}]\,q_{12} = 4\,bp_{12}\,.$$

On a ensuite

$$2\,q_{12}^{01} + [\eta - (\log b)^{01}]\,q_{12} = 2\,(k_1 + \xi^{01})\,x + \bar{x}_{11}\,.$$

La première propriété établie montre que la suite L_{12} est inscrite dans la suite L_{11}; la seconde montre que q_{12} n'est pas le transformé de Laplace de p_{11} dans le sens des u. Il en résulte que le point $2(k_1 + \xi^{01})x + \bar{x}_{11}$ est le transformé de q_{12} dans le sens des v.

La suite L_{12} *est inscrite dans la suite* L_{11}; *le transformé de Laplace de* q_{12} *dans le sens des* v *est le conjugué harmonique de* p_{11} *par rapport au couple* x, $\bar{x}_{11}$.

On a de même

$$2\,q_{11}^{01} - [\eta - (\log b)^{01}]\,q_{11} = 2\,(h_1 + \eta^{10} - k_1 - \xi^{01})\,p_{21}\,,$$
$$2\,p_{21}^{10} + [\xi - (\log a)^{10}]\,p_{21} = 2\,(h_1 + \eta^{10})\,x - \bar{x}_{11}\,.$$

On en conclut que *la suite* L_{21} *est inscrite dans la suite* L_{11}; *le transformé de Laplace de* p_{21} *dans le sens des* u *est le conjugué harmonique de* q_{11} *par rapport au couple* x, $\bar{x}_{11}$.

La suite L_{22} possède des propriétés analogues. On observe tout d'abord que q_{22} est le transformé de Laplace de p_{22} dans le sens des v. On a ensuite

$$2\,p_{22}^{10} + [\xi + (\log a)^{10}]\,p_{22} = 2\,(h_1 - \eta^{10} - k_1 + \xi^{01})\,q_{21}\,,$$
$$q_{21}^{01} - [\eta + (\log b)^{01}]\,q_{21} = -\,2\,(k_1 - \xi^{01})\,x - \bar{x}_{22}\,.$$

La suite de Laplace L_{21} *est inscrite dans la suite* L_{22}; *le transformé de Laplace de* q_{21} *dans le sens des* v *est le conjugué harmonique de* p_{22} *par rapport aux points* x, $\bar{x}_{22}$.

Enfin, on a

$$2\,q_{22}^{01} + [\eta + (\log b)^{01}]\,q_{22} = 2\,(k_1 - \xi^{01} - h_1 + \eta^{10})\,p_{12}\,,$$
$$2\,p_{12}^{10} - [\xi + (\log a)^{10}]\,p_{12} = -\,2\,(h_1 + \eta^{10})\,x - x_{22}\,.$$

La suite de Laplace L_{12} *est inscrite dans la suite* L_{22}; *le transformé de Laplace de* p_{12} *dans le sens des* u *est le conjugué harmonique de* q_{22} *par rapport au couple* x, $\bar{x}_{22}$.

8. Considérons la congruence (s_{12}). Nous avons établi la relation

$$2\,q_{12}^{10} - [\xi - (\log a)^{10}]\,q_{12} = 4\,b p_{12}\,.$$

On a de même

$$2\,p_{12}^{01} + [\eta + (\log b)^{01}]\,p_{12} = 4\,a q_{12}\,.$$

Le point p_{12} satisfait à l'équation de Laplace

$$4\,p_{12}^{11} + 2\,[\eta + (\log b)^{01}]\,p_{12}^{10} - 2\,[\xi + (\log a)^{10}]\,p_{12}^{01} +$$
$$+ \{ 2\,\eta^{10} - 2\,h_1 - 8\,ab - [\xi + (\log a)^{10}]\,[\eta + (\log b)^{01}] \}\,p_{12} = 0$$

et le point q_{12} à l'équation de Laplace

$$4\,q_{12}^{11} + 2\,[\eta - (\log b)^{01}]\,q_{12}^{10} - 2\,[\xi - (\log a)^{10}]\,q_{12}^{01} -$$
$$- \{ 2\,\xi^{01} + 2\,k_1 + 8\,ab + [\xi - (\log a)^{10}]\,[\eta - (\log b)^{01}] \}\,q_{12} = 0\,.$$

Les invariants de la première de ces équations sont

$$4\,ab \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(h_1 + k_1 - \xi^{01} - \eta^{10})\,.$$

Ceux de la seconde sont

$$4\,ab \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(h_1 + k_1 + \xi^{01} + \eta^{10})\,.$$

La droite s_{12} n'engendre donc pas en général une congruence de Goursat. On vérifie qu'il en est de même de la droite s_{21}.

9. Lorsque $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques et les résultats précédents (n^{os} 6, 7, 8) donnent dans ce cas particulier ceux que nous avons établis autrefois. Les droites s_{12}, s_{21} coïncident et engendrent une congruence de Goursat.

Revenant au cas particulier étudié ici (n^{os} 6, 7 et 8), observons que les foyers des droites s_{12}, s_{21} sont les sommets d'un quadrangle complet dont les côtés sont les droites s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} et les tangentes aux asymptotiques de la surface (x) au point x. D'une manière précise, les points q_{12}, q_{21} sont sur la tangente asymptotique xm et les points p_{12}, p_{21} sur la tangente asymptotique xn.

On a une configuration analogue pour l'angle tétraèdre complet déterminé par les droites r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}.

Liége, le 4 août 1941.