EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*,
Séance du 16 octobre 1941. — N° 10.

Sur les surfaces normales de genres un appartenant à un espace linéaire à neuf dimensions,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans plusieurs mémoires récents, M. Fano [1] a étudié les variétés à trois dimensions à courbes-sections canoniques et, par conséquent, les surfaces normales de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Celles de ces surfaces qui appartiennent à un espace linéaire S_9 à neuf dimensions forment plusieurs familles : les surfaces de l'une ne contiennent que des courbes multiples des sections hyperplanes; les surfaces d'une autre contiennent des courbes de genre trois dont les doubles sont les sections hyperplanes. Une surface de ce type est l'intersection d'une hyperquadrique avec la variété V_3^8 obtenue en rapportant projectivement les quadriques d'un espace S_3 aux hyperplans de l'espace S_9. La surface est la transformée d'une surface du quatrième ordre de l'espace S_3. Les surfaces de chacune des familles considérées dépendent de 19 modules.

Dans cette note, nous nous proposons de construire une surface normale de genres un, d'ordre seize, de S_9, qui ne peut appartenir à la seconde des familles considérées. Cette surface est d'ailleurs assez particulière, puisqu'elle possède huit points doubles coniques et deux réseaux de courbes de genre deux. Il semble difficile de voir si elle peut appartenir à la première famille. Quoi qu'il en soit, il nous a paru intéressant de la signaler.

Nous terminons en montrant que la surface qui représente l'involution d'ordre quatre engendrée sur une surface du quatrième ordre par trois homographies biaxiales harmoniques deux-à-deux permutables et dont les axes appartiennent à une même quadrique, rentre dans le type étudié.

---

(1) Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli (*Atti del Congresso intern. dei Matematici*, Bologna, 1928, t. IV, pp. 115-121); Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche (*Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, 1936, pp. 329-349); Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche (*Rend. R. Accad. N. dei Lincei*, juin 1936, pp. 813-818); Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche (*Atti del 1º Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, 1938, pp. 245-250); Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche (*Memorie della R. Accad. d'Italia*, 1937, pp. 34-64).

Les surfaces de Veronese, sections du cône V_8^4 par σ_5 et du cône $V_8'^4$ par σ'_5, sont quadruples pour la variété V_5^{16}. D'autre part, l'hyperquadrique (2) contient les espaces σ_5, σ'_5. Par conséquent, les surfaces de Veronese considérées sont doubles pour la variété V_4^{16}. Les hyperplans (3) rencontrent chacune des surfaces de Veronese en quatre points, qui sont doubles pour la surface Φ. Ce sont les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F.

Si, dans un espace linéaire à onze dimensions, on considère deux espaces linéaires à cinq dimensions indépendants et les cônes projetant de chacun de ces espaces une surface de Veronese appartenant à l'autre, l'intersection de ces deux cônes est une variété d'ordre seize à cinq dimensions. Il existe des hyperquadriques touchant cette variété en chaque point d'intersection. La section d'une des variétés de contact par un espace linéaire à neuf dimensions est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ([3]).

3. Désignons par C les sections hyperplanes de F, par Γ celles de Φ.

Les courbes Γ correspondent aux courbes 2 C et sont, par conséquent, de genre neuf.

Aux courbes C découpées par les hyperplans passant par σ_1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1, de genre deux, formant un réseau $|\Gamma_1|$ et passant par quatre des points doubles de Φ. Nous désignerons par α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{14} les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes à ces points doubles.

De même, aux courbes C dont les hyperplans passent par σ_2 correspondent sur Φ les courbes Γ_2, de genre deux, d'un réseau $|\Gamma_2|$, passant par les quatre autres points doubles de Φ. Soient α_{21}, α_{22}, α_{23}, α_{24} les courbes rationnelles équivalentes à ces points doubles.

Les courbes Γ_1, Γ_2 sont d'ordre huit et une courbe Γ_2 rencontre une courbe Γ_1 en quatre points.

D'après la théorie des involutions appartenant à une surface

([3]) En considérant la surface intersection d'une hyperquadrique du système (1) et de deux hyperquadriques du système (2), l'involution déterminée par I_2 sur cette surface possède deux coniques unies et est par suite rationnelle. On en conclut que l'intersection des variétés de contact avec V_5^{16} de deux hyperquadriques inscrites dans cette variété, avec un hyperplan de S_{11}, est une surface rationnelle d'ordre seize, possédant deux quartiques rationnelles doubles.

de genres un [4], aux sections de F par les hyperquadriques (2) correspondent sur Φ des courbes Γ_0, d'ordre seize et de genre sept, telles que

$$2\,\Gamma \equiv 2\,\Gamma_0 + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}.$$

On a d'ailleurs

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Il existe une hyperquadrique touchant Φ le long de toute courbe Γ_0. Par conséquent, dans l'espace S_9 contenant Φ, il existe un hyperplan touchant Φ le long de toute courbe Γ_1 et de toute courbe Γ_2. On a donc

$$\Gamma \equiv 2\,\Gamma_1 + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} \equiv 2\,\Gamma_2 + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}.$$

4. Considérons, dans un espace à trois dimensions, le groupe formé par les trois homographies biaxiales harmoniques

$$\frac{y_1'}{-y_2} = \frac{y_2'}{y_1} = \frac{y_3'}{-y_4} = \frac{y_4'}{y_3}, \qquad (H_1)$$

$$\frac{y_1'}{-y_3} = \frac{y_2'}{y_4} = \frac{y_3'}{y_1} = \frac{y_4'}{-y_2}, \qquad (H_2)$$

$$\frac{y_1'}{-y_4} = \frac{y_2'}{-y_3} = \frac{y_3'}{y_2} = \frac{y_4'}{y_1}, \qquad (H_3 = H_1 H_2 = H_2 H_1).$$

Les axes de ces homographies sont respectivement

$$y_2 = iy_1,\ y_4 = iy_3 \quad \text{et} \quad y_2 = -iy_1,\ y_4 = -iy_3;$$

$$y_3 = iy_1,\ y_4 = iy_2 \quad \text{et} \quad y_3 = -iy_1,\ y_4 = -iy_2;$$

$$y_4 = iy_1,\ y_3 = iy_2 \quad \text{et} \quad y_4 = -iy_1,\ y_3 = -iy_2;$$

ce sont des génératrices de même mode de la quadrique Q d'équation

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

La surface du quatrième ordre la plus générale, ne passant

---

[4] Voir notre Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70). Voir également notre Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312) et notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

pas par les axes des homographies H_1, H_2, H_3 et transformée en elle-même par ces homographies, a pour équation

$$\begin{aligned} & a_0 y_1 y_2 y_3 y_4 + a_1 (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + y_4^4) + a_2 (y_1^3 y_2 - y_1 y_2^3 - y_3^3 y_4 + y_3 y_4^3) \\ & + a_3 (y_1^3 y_3 + y_2^3 y_4 - y_3^3 y_1 - y_4^3 y_2) + a_4 (y_1^3 y_4 - y_2^3 y_3 + y_3^3 y_2 + y_4^3 y_1) \\ & + a_5 (y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) + a_6 (y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + a_7 (y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2) \\ & + a_8 (y_1 y_2 + y_3 y_4)(y_1 y_3 - y_2 y_4) + a_9 (y_1 y_3 + y_2 y_4)(y_1 y_4 - y_2 y_3) \\ & + a_{10} (y_1 y_4 + y_2 y_3)(y_1 y_2 - y_3 y_4) = 0. \end{aligned}$$

Les homographies H_1, H_2, H_3 engendrent sur cette surface F_0 une involution d'ordre quatre possédant vingt-quatre points unis et, par conséquent, de genres un. Nous allons construire une image de cette involution.

Commençons par considérer les quadriques transformées en elles-mêmes par H_1 et ne passant pas par les axes de cette homographie. Elles ont pour équation

$$\lambda_1 (y_1^2 - y_2^2) + \lambda_2 (y_3^2 - y_4^2) + \lambda_3 (y_1 y_3 - y_2 y_4) + \lambda_4 (y_1 y_4 + y_2 y_3) + \lambda_5 y_1 y_2 + \lambda_6 y_3 y_4 = 0.$$

Rapportons projectivement ces quadriques aux hyperplans d'un espace linéaire à cinq dimensions en posant

$$\frac{x_0}{y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2} = \frac{x_1}{y_1 y_2 - y_3 y_4} = \frac{x_2}{y_1 y_4 + y_2 y_3} = \frac{x_3}{y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2}$$
$$= \frac{x_4}{y_1 y_2 + y_3 y_4} = \frac{x_5}{y_1 y_3 - y_2 y_4}.$$

On a

$$x_0^2 + 4 x_1^2 + 4 x_2^2 = x_3^2 + 4 x_4^2 + 4 x_5^2, \tag{5}$$
$$x_0 x_4 - x_1 x_3 - 2 x_2 x_5 = 0. \tag{6}$$

A l'équation de la surface F_0 correspond l'équation

$$\left.\begin{aligned} & a_0 (x_4^2 - x_1^2) + 2 a_1 (x_0^2 + x_3^2 + 2 x_1^2 + 2 x_4^2) + 2 a_2 (x_0 x_1 + x_3 x_4) \\ & + 4 a_3 (x_0 x_2 + x_3 x_5) + 4 a_4 (x_0 x_2 - x_4 x_5) + 2 a_5 (x_4^2 + x_1^2) \\ & + 2 a_6 (2 x_5^2 + x_4^2 - x_1^2) + 2 a_7 (2 x_2^2 - x_4^2 + x_1^2) + 4 a_8 x_4 x_5 \\ & + 2 a_9 (x_3 x_4 - x_0 x_1) + 4 a_{10} x_1 x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Les équations (5), (6) et (7) représentent une surface F de genres un, image de l'involution d'ordre deux engendrée sur F_0 par l'homographie H_1.

Aux homographies H_2, H_3 correspond l'homographie H, transformant F en elle-même. Les hyperquadriques (5) et (7) ne passent pas par les axes σ_1, σ_2 de H, mais l'hyperquadrique (6) contient ces axes. Nous nous trouvons donc devant le cas étudié plus haut.

L'involution d'ordre deux engendrée sur F par H, c'est-à-dire l'involution d'ordre quatre engendrée sur F_0 par H_1, H_2, H_3, a pour image la surface Φ découpée par les hyperplans

$$X_{00} + 4\,X_{11} + 4\,X_{22} - X_{33} - 4\,X_{44} - 4\,X_{55} = 0,$$

$$2\,a_1 X_{00} - (a_0 - 4\,a_1 - 2\,a_5 + 2\,a_6 - 2\,a_7)\,X_{11} + 4\,a_7 X_{22} + 2\,a_1 X_{33}$$
$$+ (a_0 + 4\,a_1 + 2\,a_5 + 2\,a_6 - 2\,a_7)\,X_{41} + 4\,a_6 X_{55} + 2\,(a_2 - a_9)\,X_{01}$$
$$+ 4(a_3 + a_4)X_{02} + 4\,a_{10}X_{12} + 2(a_2 + a_9)X_{34} + 4\,a_3 X_{35} - 4\,(a_4 - a_8)X_{45} = 0$$

sur la variété de contact de la variété V_5^{16} avec l'hyperquadrique

$$X_{00}X_{44} + X_{11}X_{33} + 4\,X_{22}X_{55} - 2\,X_{01}X_{34} - 4\,X_{02}X_{45} + 4\,X_{12}X_{35} = 0.$$

5. La surface F qui vient d'être considérée possède huit points doubles coniques qui correspondent aux points unis de l'involution engendrée par H_1 sur F_0. Ces points sont situés sur les hyperquadriques

$$x_0^2 + 4\,x_1^2 + x_3^2 + 4\,x_4^2 = 0, \qquad x_0 x_3 + 4\,x_1 x_4 = 0,$$
$$x_2^2 + x_1^2 - x_4^2 = 0, \qquad x_5^2 - x_1^2 + x_4^2 = 0,$$

qui sont d'ailleurs inscrites dans la surface F.

A la section de F_0 par la quadrique Q, qui contient les axes des homographies H_1, H_2, H_3, correspond sur F une courbe d'ordre huit et de genre trois, le long de laquelle l'hyperquadrique

$$x_0^2 + 4\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 + 4\,x_4^2 + 4\,x_5^2 = 0 \tag{8}$$

touche la surface F.

La surface Φ représentant l'involution I_4 appartenant à F_0 possède, d'après la théorie générale ([5]), douze points doubles. Huit de ces points correspondent aux points unis de l'involution engendrée par H sur F; les quatre autres correspondent aux huit points doubles de la surface F; ils sont situés sur les hyperplans

$$X_{00} + 4X_{11} + X_{33} + 4X_{44} = 0, \; X_{22} + X_{11} - X_{41} = 0, \; X_{55} - X_{11} + X_{44} = 0$$

et sur l'hyperquadrique

$$X_{00}X_{33} + 16\,X_{11}X_{44} + 8\,X_{31}X_{34} = 0.$$

A la courbe suivant laquelle l'hyperquadrique (8) touche la surface F correspond une courbe rationnelle du huitième ordre, le long de laquelle l'hyperplan

$$X_{00} + 4\,X_{11} + 4\,X_{22} + X_{33} + 4\,X_{44} + 4\,X_{55} = 0$$

touche la surface Φ.

Liége, le 19 septembre 1941.

([5]) Voir notre Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Loc. cit.*, seconde partie).

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4) N° réf. 2019.