EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Séance du 14 août 1941. — N° 8.

Sur les surfaces de bigenre un appartenant à un espace à huit dimensions,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que les surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) ont été découvertes par M. Enriques [1], qui a montré qu'une telle surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Une surface de genres zéro et de bigenre un, normale, à sections hyperplanes de genre π, a l'ordre $2\pi - 2$ et appartient à un espace linéaire à $\pi - 1$ dimensions. Ses sections hyperplanes sont des courbes paracanoniques.

Pour $\pi = 3$, on obtient un plan double dont la courbe de diramation est formée de deux droites et d'une courbe du sixième ordre passant doublement par le point d'intersection des deux droites et ayant un tacnode sur chacune de ces droites, la tangente tacnodale étant la droite en question. (Enriques.)

Pour $\pi = 4$, on obtient une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre ou d'un angle tétraèdre. (Enriques)

La congruence lieu des droites joignant les couples de points conjugués par rapport à trois quadriques est également un modèle projectif d'une surface de bigenre un. (Fano.)

Les surfaces de bigenre un à sections hyperplanes de genre $\pi = 5$ ou $\pi = 6$ ont été déterminées par M. Burniat [2].

Dans cette note, nous nous proposons de construire deux surfaces de bigenre un à sections hyperplanes de genre $\pi = 9$. L'une appartient à l'intersection de deux cônes projetant deux surfaces de Veronese, l'autre appartient à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans. La première surface nous conduit à la construction d'une variété algébrique à trois dimensions à sections hyperplanes de bigenre un, rencontrée par M. Fano et, dans un cas particulier, par nous-même.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions,

---

(1) Pour la bibliographie, voir notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934).

(2) Recherches sur les surfaces de bigenre un (*Mém. Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1936).

une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$), transformée en elle-même par l'homographie harmonique H d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{-x_3} = \frac{x'_4}{-x_4} = \frac{x'_5}{-x_5}.$$

Les équations de la surface F peuvent s'écrire sous la forme

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2) + \varphi_1(x_3, x_4, x_5) = 0,$$
$$\varphi_2(x_0, x_1, x_2) + \varphi_2(x_3, x_4, x_5) = 0,$$
$$\varphi_3(x_0, x_1, x_2) + \varphi_3(x_3, x_4, x_5) = 0,$$

où les φ et les ψ sont des formes quadratiques par rapport à leurs arguments.

Si nous supposons ces formes complètes, la surface F ne rencontre pas les axes ponctuels

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0; \qquad x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

de l'homographie H et celle-ci détermine sur F une involution I_2 d'ordre deux, privée de points unis, donc de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = P_4 = 1$) (1).

Pour obtenir un modèle projectif de l'image de l'involution I_2, on peut procéder de la manière suivante : Désignons par C les courbes découpées sur F par les hyperquadriques de S_5. Les courbes C sont de genre 17 et forment un système linéaire $|C|$ de degré 32 et de dimension 17. Ce système est transformé en lui même par H et contient deux systèmes linéaires partiels, de même dimension huit, appartenant à l'involution I_2. L'un de ces systèmes, $|C_1|$, est découpé sur F par les hyperquadriques de S_5, invariantes pour H et ne contenant pas les axes de cette homographie. L'autre système, $|C_2|$, est découpé sur F par les hyperquadriques de S_5 invariantes pour H et passant par les axes ponctuels de cette homographie.

On obtiendra des modèles projectifs de la surface Φ, image de l'involution I_2, en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_8, soit les courbes C_1, soit les courbes C_2.

2. Les hyperquadriques de S_5 transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes ponctuels de cette homographie ont pour équation

$$\lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{12}x_1x_2 + \lambda_{20}x_2x_0 + \lambda_{01}x_0x_1$$
$$+ \lambda_{33}x_3^2 + \lambda_{44}x_4^2 + \lambda_{55}x_5^2 + \lambda_{45}x_4x_5 + \lambda_{53}x_5x_3 + \lambda_{34}x_3x_4 = 0.$$

(1) Enriques et Severi, Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (*Acta Mathematica*, 1909, t. 32 et 33).

Rapportons projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S_{11}, à onze dimensions, en posant

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \quad (i,\ k = 0, 1, 2 \text{ et } i,\ k = 3, 4, 5), \quad (X_{ik} = X_{ki}).$$

L'élimination des x entre les équations précédentes donne les équations obtenues en exprimant que les déterminants

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{20} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_{33} & X_{34} & X_{53} \\ X_{34} & X_{44} & X_{45} \\ X_{53} & X_{45} & X_{55} \end{vmatrix}$$

sont de caractéristique un.

Appelons σ_5 l'espace linéaire d'équations

$$X_{ik} = 0, \qquad (i,\ k = 3, 4, 5)$$

et σ_5' l'espace d'équations

$$X_{ik} = 0, \qquad (i,\ k = 0, 1, 2).$$

Les équations obtenues en écrivant que le premier des déterminants est de caractéristique un représentent un cône V_8^4 obtenu en projetant de σ_5' une surface de Veronese appartenant à σ_5. De même, le second déterminant conduit à un cône $V_8'^4$ obtenu en projetant de σ_5 une surface de Veronese appartenant à σ_5'. Ces deux cônes ont en commun une variété V_5^{16} représentant les couples de points de S_5 conjugués par rapport à l'homographie harmonique H.

Les hyperquadriques de S_5 transformées en elles-mêmes par H et passant par les axes ponctuels de cette homographie ont pour équations

$$\Sigma \mu_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (i = 0, 1, 2;\ k = 3, 4, 5).$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, on en déduit

$$\Sigma \mu_{ik} \mu_{jh} X_{ij} X_{kh} = 0, \qquad (i, j = 0, 1, 2;\ k, h = 3, 4; 5). \qquad (1)$$

On obtient ainsi une famille ∞^8 d'hyperquadriques de S_{11} dont l'enveloppe est la variété V_5^{16}.

3. Revenons à la surface F. Posons

$$\varphi_1 \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k, \quad \varphi_2 \equiv \Sigma b_{ik} x_i x_k, \quad \varphi_3 \equiv \Sigma c_{ik} x_i x_k, \quad (i,\ k = 0, 1, 2),$$
$$\psi_1 \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k, \quad \psi_2 \equiv \Sigma b_{ik} x_i x_k, \quad \psi_3 \equiv \Sigma c_{ik} x_i x_k, \quad (i,\ k = 3, 4, 5).$$

Aux équations de la surface F correspondent les équations de trois hyperplans

$$\Sigma a_{ik} X_{ik} = 0, \quad \Sigma b_{ik} X_{ik} = 0, \quad \Sigma c_{ik} X_{ik} = 0$$

de l'espace S_{11} et l'espace linéaire S_8 à huit dimensions commun à ces hyperplans coupe la variété V_5^{16} suivant un modèle projectif Φ_1 de la surface Φ. Cette surface Φ_1, d'ordre seize, est donc une surface de genres zéro et de bigenre un. Ses sections hyperplanes Γ_1, de genre neuf, correspondent aux courbes C_1.

Les hyperquadriques (1) touchent la surface Φ_1 en chaque point d'intersection; les courbes de contact Γ_2, de genre neuf, correspondent aux courbes C_2. Les courbes Γ_2 forment un système linéaire de degré 16 et de dimension huit.

Si, dans un espace linéaire à onze dimensions, on considère deux espaces linéaires à cinq dimensions indépendants et les cônes projetant de chacun de ces espaces une surface de Veronese appartenant à l'autre, on obtient une variété à cinq dimensions d'ordre seize dont les sections par des espaces linéaires à huit dimensions sont des surfaces normales de genres zéro et de bigenre un.

4. Rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_8 à huit dimensions les hyperquadriques de S_5 invariantes pour H et passant par les axes ponctuels de cette homographie. A cet effet, posons

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i = 0, 1, 2;\ k = 3, 4, 5).$$

En éliminant les x entre ces équations, on obtient une variété V_4^6 représentée en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{03} & X_{04} & X_{05} \\ X_{13} & X_{14} & X_{15} \\ X_{23} & X_{24} & X_{25} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un. A chaque point de la variété V_4^6 correspond une droite, unie pour l'homographie H, s'appuyant sur les axes ponctuels de cette homographie. La variété V_4^6 est donc la variété de Segre représentant les points de deux plans.

Nous avons

$$x_0 : x_1 : x_2 = X_{03} : X_{13} : X_{23},$$
$$x_3 : x_4 : x_5 = X_{03} : X_{04} : X_{05}.$$

Posons

$$\varphi'_i \equiv \varphi_i(X_{03}, X_{13}, X_{23}), \qquad \psi'_i = \psi_i(X_{03}, X_{04}, X_{05}).$$

Des équations de la surface F, on déduit

$$\varphi'_1 = \rho^2\psi'_1, \qquad \varphi'_2 = \rho^2\psi'_2, \qquad \varphi'_3 = \rho^2\psi'_3$$

et par conséquent le modèle projectif Φ_2 de la surface Φ, obtenu en rapportant projectivement les courbes C_2 aux hyperplans de S_8, appartient à la variété de Segre V_4^8 et à la variété

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces équations représentent une variété conique V_6^{12} d'ordre douze, dont le sommet est l'espace à trois dimensions

$$X_{03} = X_{13} = X_{23} = X_{04} = X_{05} = 0.$$

Observons que cet espace rencontre la variété de Segre V_4^6 suivant une quadrique Q.

La variété V_6^{12} possède deux espaces linéaires à cinq dimensions quadruples, à savoir les espaces

$$X_{03} = X_{13} = X_{23} = 0, \qquad X_{03} = X_{04} = X_{05} = 0.$$

Chacun de ces espaces coupe la variété V_4^6 suivant une variété cubique à trois dimensions. En dehors de ces deux variétés et de la quadrique Q, multiple d'ordre douze pour V_6^{12}, la variété V_6^{12} coupe V_6^4 suivant la surface Φ_2. A un point de celle-ci correspond une droite de S_5 s'appuyant sur les deux axes ponctuels de l'homographie H et coupant F suivant un groupe de l'involution I_2. La surface Φ_2 est d'ordre 16 et ses sections hyperplanes Γ_2 correspondent aux courbes C_2; elles sont de genres neuf.

Il existe des surfaces normales de genres zéro et de bigenre un, d'ordre seize, dans un espace linéaire à huit dimensions, tracées sur la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans.

5. On peut observer que les équations

$$\varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2 = 0, \quad \varphi_3\psi_1 - \varphi_1\psi_3 = 0, \quad \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = 0$$

peuvent s'écrire respectivement

$$\sum \begin{vmatrix} b_{ij} & b_{kh} \\ c_{ij} & c_{kh} \end{vmatrix} X_{ik} X_{jh} = 0, \quad \sum \begin{vmatrix} c_{ij} & c_{kh} \\ a_{ij} & a_{kh} \end{vmatrix} X_{ik} X_{jh} = 0,$$

$$\sum \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{kh} \\ b_{ij} & b_{kh} \end{vmatrix} X_{ik} X_{jh} = 0, \quad (i, j = 0, 1, 2;\ k, h = 3, 4, 5).$$

On obtient ainsi les équations de trois hyperquadriques passant par la surface Φ_2.

La variété de Segre V_4^6 contient deux réseaux de variétés cubiques de Segre, représentant les couples de points d'une droite et d'un plan Chacune de ces variétés coupe la surface Φ_2 suivant une courbe qui représente les couples de I_2 appartenant à la section de la surface F par un hyperplan contenant un des axes ponctuels de l'homographie H. Ces sections sont donc des courbes d'ordre huit et de genre trois.

6. Revenons à la variété V_5^{16} de S_{11} rencontrée plus haut (n° 2). La section de cette variété par un espace linéaire S_9 est une variété W_3^{16} dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un.

L'espace S_9 coupe la surface de Veronese base du cône V_8^4 dans l'espace σ_5 en quatre points qui sont quadruples pour la variété W_3^{16}. De même, l'espace S_9 coupe la surface de Veronese base du cône $V_8'^4$ dans σ_5' en quatre points quadruples pour la variété W_3^{16}. La variété W_3^{16} possède donc huit points quadruples, répartis en deux quaternes.

Une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un contient, comme nous l'avons montré dans une note antérieure (1), un système linéaire de surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$). En ce qui concerne la variété W_3^{16}, ces surfaces de genres un sont les surfaces suivant lesquelles les hyperquadriques (1) touchent la variété.

Partant du résultat qui vient d'être rappelé, M. Fano (2) a déterminé toutes les variétés à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un; il a rencontré la variété W_3^{16}, dont on trouve ici une construction simple. Nous avions rencontré antérieurement un cas particulier de la variété W_3^{16}, en considérant la représentation de l'involution des couples de points inverses de l'espace (3).

Remarquons, en passant, que la section par un hyperplan de S_{11} de la variété de contact d'une hyperquadrique (1) avec la variété V_5^{16} est une variété M_3^{16} à courbes-sections canoniques (4).

Liége, le 21 juillet 1941.

---

(1) Sur les variétés à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1933, pp. 134-140).

(5) Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno (*Mem. Soc. ital. Scienze*, 1938).

(3) Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace... (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 907-922).

(4) Voir au sujet de ces variétés les travaux de M. FANO : Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche (*Scritti offerti a L. Berzolari*, Pavie, 1936); Sulle varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche (*Memorie R. Acad. Italia*, 1937). Voir aussi une note dans les *Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, 1938.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)