Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface de genres arithmétique et géométrique nuls, de bigenre trois

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface possédant une courbe canonique isolée et une involution du second ordre privée de points unis, dont l'image est une surface de genres arihtmétique et géométrique nuls, possédant un réseau bicanonique irréductible.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface de genres arihtmétique et géométrique nuls, de bigenre trois

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une surface possédant une courbe canonique isolée et une involution du second ordre privée de points unis, dont l'image est une surface de genres arihtmétique et géométrique nuls, possédant un réseau bicanonique irréductible.

Nous avons démontré qu'une surface de genres arithmétique et géométrique nuls, possédant un système bicanonique irréductible qui soit au moins un réseau, était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface possédant une courbe canonique isolée (1). Un exemple était obtenu par une voie détournée. Il s'agissait de l'image d'une involution cyclique d'ordre huit, privée de points unis, appartenant à une surface normale de l'espace à six dimensions, intersection de quatre hyperquadriques (2). Cette surface image avait les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} = 3$.

Nous avons cherché à construire d'autres surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} = 3$ à système bicanonique irréductible (2). C'est

(1) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41), *Surfaces privées de courbe canonique possédant un système bicanonique irréductible* (Convegno intern. di Geometria a celebr. del centenario della nacità di Federigo Enriques, 1971, pp. 101-107).

(2) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1949, pp. 688-693).

la solution de ce problème qui fait l'objet de cette note. Il semble d'ailleurs que le procédé employé soit difficile à étendre à la construction de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 3$, tout au moins dans le cas général.

1. Considérons dans un espace S_5 à cinq dimensions, une homographie harmonique H d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4 : -x_5.$$

Elle possède comme axes deux plans $\sigma_1(x_0 = x_1 = x_2 = 0)$ et $\sigma_2(x_3 = x_4 = x_5 = 0)$.

Soient ensuite deux hyperquadriques

$$\varphi_1(x_0,x_1,x_2) + \psi_1(x_3,x_4,x_5) = 0,$$

$$\varphi_2(x_0,x_1,x_2) + \psi_2(x_3,x_4,x_5) = 0$$

et une surface du quatrième ordre d'équation

$$x_5 f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) + [\varphi_3(x_0,x_1,x_2) + \psi_3(x_3,x_4,x_5)]^2 = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ sont des formes quadratiques et f_3 une forme cubique de leurs arguments, transformées en elles-mêmes par l'homographie H.

Ces trois hypersurfaces ont en commun une surface F d'ordre seize. Les deux premières hyperquadriques ne rencontrent pas les axes de l'homographie H, donc cette homographie engendre sur F une involution du second ordre privée de points unis.

On peut supposer que dans l'hyperplan $x_5 = 0$ les trois hyperquadriques $\varphi_1 + \psi_1 = 0, \varphi_2 + \psi_2 = 0, \varphi_3 + \psi_3 = 0$ sont indépendantes. Elles ont alors en commun une courbe C_1, d'ordre huit et de genre cinq, dont la série canonique est découpée par les hyperplans. Si nous désignons par C_2 les sections hyperplanes de la surface F, nous avons donc

$$C'_1 \equiv C_2.$$

D'autre part, l'hyperplan $x_5 = 0$ coupe F suivant une courbe d'ordre huit comptée deux fois et on a

$$C_2 \equiv 2C_1.$$

(1) *Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique. 1966, pp. 926-934, 1967, pp. 17-20, 1967, pp. 907-912).

On en déduit

$$C_2' \equiv C_1 + C_1' \equiv C_1 + C_2$$

et enfin

$$C_2' - C_2 \equiv C_1.$$

La surface F possède donc une courbe canonique isolée C_1.

2. L'homographie H détermine sur F une involution I d'ordre deux privée de points unis et la courbe C_1 est transformée en elle-même par H. Dans l'hyperplan S_4 contenant C_1, H détermine une homographie ayant un plan et une droite unis. Nous supposerons que ce plan est σ_1 et la droite, une droite s_2 appartenant à σ_2.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I et soit Γ_1 la courbe qui correspond sur cette surface à la courbe C_1. La courbe Γ_1 est, par la formule de Zeuthen, de genre trois.

Les hyperplans de S_5 passant par σ_2 découpent sur F des courbes C_2' (1) parmi lesquelles se trouve la courbe C_1 comptée deux fois. A ces courbes C_2' correspondent sur Φ des courbes Γ_2 appartenant au système $| 2\Gamma_1 |$ et qui découpent sur Γ_1 une série paracanonique.

Les hyperplans de S_5 passant par σ_1 découpent sur F des courbes C_2''. Ces courbes découpent sur C_1 la série g_4^2 qui correspond à la série canonique de Γ_1. Aux courbes C_2'' correspondent donc sur Φ les adjointes $\bar{\Gamma}_2$ à la courbe Γ_1.

Si la surfacc Φ possède une courbe canonique, ce ne peut être que Γ_1, qui a pour homologue sur F la courbe canonique C_1 de cette surface. Nous allons voir que cela est impossible.

Supposons donc que Γ_1 soit la courbe canonique de la surface Φ.

Les courbes $\bar{\Gamma}_2$ étant les adjointes à la courbe Γ_1, on a

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_2$$

d'où

$$\Gamma_1' - \Gamma_1 \equiv \Gamma_1, \ \bar{\Gamma}_2 \equiv 2\Gamma_1.$$

Or, on a également

$$\Gamma_2' \equiv 2\Gamma_1$$

d'où $\bar{\Gamma}_2 \equiv \Gamma_2$, ce qui est absurde. La surface Φ est donc dépourvue de courbe canonique.

(1) Ne pas confondre la notation employée ici C_2' avec la notation d'adjonction.

On en conclut que $| \Gamma'_2 |$ ne peut être le système bicanonique de la surface Φ et que si ce système bicanonique existe, ce ne peut être que le système $| \Gamma_2 |$. On aurait alors $P_2 = 3$ puisque $| \Gamma_2 |$ est un réseau.

3. Sur la surface F, C_1 est la courbe canonique, donc $| 2C_1 | = | C_2 |$ est le système bicanonique de cette surface. Il en résulte que l'un des systèmes $| \bar{\Gamma}_2 |$, $| \Gamma_2 |$ est le système bicanonique de Φ. Nous venons de voir que ce ne peut être $| \bar{\Gamma}_2 |$, donc le système bicanonique de Φ est le système $| \Gamma_2 |$ et on a $P_2 = 3$.

De $| \Gamma_2 | = | 2\Gamma_1 |$, on déduit $| \Gamma_3 | = | \Gamma_1 + \Gamma'_1 |$, $| \Gamma_4 | = | 2\Gamma'_1 |$. Mais on a $| \Gamma_4 | = | 2\Gamma_2 | = | 4\Gamma_1 |$, donc

$$2\Gamma'_1 \equiv 4\Gamma_1,$$

c'est-à-dire

$$2\Gamma'_1 \equiv 2\Gamma_2, \quad 3\Gamma_1 \equiv \Gamma_1 + \Gamma'_1.$$

Le diviseur de Severi de la surface Φ est donc $\sigma = 2$.

Il est facile de voir que les systèmes pluricanoniques de la surface Φ sont

$$|2\Gamma_1|, \ |\Gamma_1 + \Gamma'_1|, \ |4\Gamma_1|, \ |3\Gamma_1 + \Gamma'_1|, \ldots$$

et qu'il existe sur la surface Φ des systèmes

$$|\Gamma'_1|, \ |3\Gamma_1|, \ |2\Gamma_1 + \Gamma'_1|, \ |5\Gamma_1|, \ldots$$

dont les doubles sont équivalents aux doubles des systèmes pluricanoniques.

4. Il est facile de voir que la surface Φ possède les mêmes propriétés que la surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$, dont le système bicanonique est irréductible.

Soit Φ_0 la surface de genres $p_a = p_g = 0$, ayant un réseau bicanonique irréductible que nous avons considérée dans nos premières recherches et F_0 la surface possédant une courbe canonique isolée qui s'en déduit (1). Pour notre objet, il s'agit de montrer que cette dernière surface appartient à deux hyperquadriques ne passant pas par les axes de l'homographie H et à une hypersurface du quatrième

(1) *Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique; 1966, pp. 1058-1063).

ordre touchant l'hyperplan $x_5 = 0$ suivant une hyperquadrique de cet espace assignée.

Sur la surface F_0, le système bicanonique est découpé par les hyperplans, donc les hyperquadriques découpent sur la surface des courbes tétracanoniques. Le système tétracanonique a la dimension $P_4 - 1 = 24 + 1 = 25$. D'autre part, les hyperquadriques d'un espace à cinq dimensions forment un système de dimension 27. Il existe donc deux hyperquadriques contenant la surface F_0 et comme celle-ci ne rencontre pas les axes de H, il en est de même de ces hyperquadriques.

Les hypersurfaces du quatrième ordre touchant l'hyperplan $x_5 = 0$ suivant une hyperquadrique déterminée forment un système de dimension 37. Elles découpent sur F_0 des courbes du système sexticanonique ($4C_2 - 2C_1 = 3C_2$). La dimension de ce système étant égale à 31, il existe certainement des hypersurfaces du quatrième ordre satisfaisant aux conditions indiquées et contenant la surface F_0.

La surface que nous avons construite est donc la surface générale de genres $p_a = p_g = 0$, possédant un réseau bicanonique irréductible.

Liège, le 5 août 1974.